Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Respostas à Ficha de Trabalho 7

1. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$ para $0 < |z| < \infty$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n+3}}{n!}$ para $0 < |z| < \infty$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-2}$ para $0 < |z| < \infty$;

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2}{(2n+1)!}(z-2)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} 2}{(2n)!}(z-2)^{2n-1}$ para $0 < |z-2| < \infty$.

2. (i) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}$.

3. (i) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-3}$;

(ii) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n(2i)^n}{(z-i)^{n+4}}$;

(iii) $\oint_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^3}\, dz = -\frac{5\pi i}{32}$;

(iv) $\oint_{|z-i|=3} f(z)\, dz = 0$.

4. (i) Pólo de ordem 3; (ii) Pólo simples; (iii) Singularidade removível;

(iv) Singularidade removível; (v) Pólo de ordem 4; (vi) Pólo simples.

5. (i) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ (pólos de ordem 2); (ii) 0 (singularidade essencial);

(iii) 0 (pólo de ordem 2) e $2k\pi i$, para qualquer $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (pólos simples).

6. (i) Pólo simples e Res $(f, 0) = 1$; (ii) Pólo simples e Res $(f, 0) = \frac{1}{4}$;

(iii) Pólo de ordem 2 e Res $(f, 0) = 0$.

7. (i) 0 é pólo de ordem 2 e $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{16}{\pi^2}$; $\frac{\pi}{4}$ é pólo simples e $\operatorname{Res}(f, \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi}$;
$k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, são pólos simples e $\operatorname{Res}(f, k\pi) = \frac{4}{k\pi^2(4k-1)}$.

(ii) 0 é singularidade essencial e Res$(f, 0) = \frac{1}{4!}$.

(iii) i é pólo simples e $\operatorname{Res}(f, i) = \frac{\operatorname{ch} i}{2i(i-3)} = \frac{\cos 1}{2i(i-3)}$
$-i$ é pólo simples e $\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{\operatorname{ch} i}{2i(i+3)} = \frac{\cos 1}{2i(i+3)}$; 3 é pólo simples e $\operatorname{Res}(f, 3) = \frac{\operatorname{ch} 3}{10}$.

(iv) i é pólo simples e $\operatorname{Res}(f, i) = -1$.

(v) -1 é pólo simples e $\operatorname{Res}(f, -1) = e^{-1}$; 0 é sing. essencial e $\operatorname{Res}(f, 0) = 1 - e^{-1}$.

8. (i) $-\frac{\pi i}{3}$; (ii) $\pi \operatorname{sh} 1$; (iii) 0; (iv) πi; (v) 0; (vi) 0; (vii) $\frac{2\pi i e^2}{3}$.

9. (i) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$; (ii) $\frac{3\pi}{8}$; (iii) $\frac{\pi}{2e^a}$; (iv) $\frac{\pi}{e}$; (v) $\frac{2\pi}{1-p^2}$; (vi) $\frac{5\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$.

10. O integral ao longo de $\gamma_{\epsilon,R}$ é $\pi e^{i\frac{\pi}{8}}$ e $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1}dx = \pi\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{1+e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2\pi}{2+\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}$.

11. $\frac{\pi}{2}$.