Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais
Ficha de Trabalho 7

1. Determine a série de Laurent da função $f(z)$ na vizinhança do ponto z_0, isto é, válida em $0 < |z - z_0| < R$, indicando o valor de R;

   (i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}, \quad z_0 = 0;$ (ii) $f(z) = z^3 e^{1/z}, \quad z_0 = 0;$

   (iii) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}, \quad z_0 = 0;$ (iv) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z - 2}, \quad z_0 = 2.$

2. Determine a série de Laurent da função
$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$
   válida em

   (i) $\{z \ : \ 2 < |z| < 3\};$ (ii) $\{z \ : \ 3 < |z| < +\infty\}.$

3. Determine a série de Laurent da função
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$
   válida em

   (i) $\{z \ : \ 0 < |z - i| < 2\};$ (ii) $\{z \ : \ |z - i| > 2\}.$

   Aproveite os anteriores desenvolvimentos em série para calcular

   (iii) $\oint_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^3}\, dz;$ (iv) $\oint_{|z-i|=3} f(z)\, dz,$

   onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo.

4. Classifique a singularidade z_0 da função $f(z)$

   (i) $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}, \quad z_0 = 0;$ (ii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}, \quad z_0 = 0;$

   (iii) $f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi;$ (iv) $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z}, \quad z_0 = 0;$

   (v) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = 0;$ (vi) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = -1.$

5. Determine e classifique todas as singularidades das seguintes funções:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{1-\sin z}$; (ii) $f(z) = \cos(z^{-1})$; (iii) $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z}-1} + z^{-2}$.

6. Calcule Res (f, z_0)

(i) $f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, $z_0 = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

(ii) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{(1-\cos 2z)\,\sin z}$, $z_0 = 0$;

(iii) $f(z) = \dfrac{z^{n-2}}{\sinh^n z}$, $z_0 = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

7. Calcule os resíduos da função $f(z)$ nas suas singularidades

(i) $f(z) = \dfrac{\cot z}{z^2 - \pi z/4}$; (ii) $f(z) = z^3 e^{1/z}$; (iii) $f(z) = \dfrac{\cosh z}{(z^2+1)(z-3)}$;

(iv) $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$; (v) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z+1}$.

8. Calcule os integrais, onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo

(i) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2-6z}\,dz$; (ii) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}\,dz$;

(iii) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\tan z}{z e^{1/(z+2)}}\,dz$; (iv) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cos(iz)}{z^3}\,dz$;

(v) $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}\,dz$, $\gamma = \{z = x+iy\colon x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}\}$;

(vi) $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{\cos(z/2)}{z^2-4}\,dz$, $\gamma = \{z = x+iy : x^2/9 + y^2/4 = 1\}$;

(vii) $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz$, $\gamma = \{z = x+iy : x^2 + y^2 - 2x = 0\}$.

9. Calcule os seguinte integrais:

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; (ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$;

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\sin ax}{x^2+1}\,dx$, $a > 0$; (iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$;

(v) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\,dx,\quad 0<p<1;$ (vi) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}\,dx.$

10. Calcule $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1}\,dx$ do seguinte modo: sendo $r>0$, escrevemos C_r para a semicircunferência
$$C_r = \{z\in\mathbb{C}\colon |z|=r, \mathrm{Im}(z)\geq 0\},$$
e, para $a,b\in\mathbb{R}$, escrevemos $[a,b]=\{t+0i\in\mathbb{C}\colon a\leq t\leq b\}$. Seja $\sqrt[4]{z}$ a função raíz quarta que toma valores no primeiro quadrante. Dados $0<\epsilon<R$, considere a curva
$$\gamma_{\epsilon,R} = C_R\cup\cup[-R,-\epsilon]\cup -C_\epsilon\cup[\epsilon,R]$$
percorrida uma vez no sentido directo. Comece por mostrar que $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}\frac{\sqrt[4]{z}}{z^2+1}dz=0$ e que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\sqrt[4]{z}}{z^2+1}dz=0$. Finalmente, calcule $\displaystyle\oint_{\gamma_{\epsilon,R}}\frac{\sqrt[4]{z}}{z^2+1}dz$ para $0<\epsilon<1<R$.

11. Use as curvas $\gamma_{\epsilon,R}$ definidas na pergunta anterior e o Teorema dos Resíduos para calcular
$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

12. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A=\mathbb{C}\setminus\{z_1,\ldots,z_n\}$. Observe que a função $F(z)=-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$ possui uma singularidade isolada em $z=0$. Define-se o **resíduo de f em** ∞ por:
$$\mathrm{Res}(f,\infty)=\mathrm{Res}(F,0).$$
Mostre que se $\gamma\subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1,\ldots,z_n\}$ no seu interior, então:
$$\int_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i\ \mathrm{Res}(f,\infty).$$
Aproveite o resultado para calcular
$$\oint_{|z|=3}\frac{z^3e^{1/z}}{z^3+1}dz,$$
onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

13. Suponha que $f(z)$ é uma função analítica com uma singularidade essencial em $z=z_0$. Este exercício mostra que para todo o número complexo $a\in\mathbb{C}$, existe uma sucessão z_n convergente para z_0 tal que $f(z_n)$ converge para a. Em particular, não existe o limite $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

(a) Use as fórmulas integrais para os coeficientes da série de Laurent em torno de z_0 para mostrar que se $g(z)$ tem uma singularidade isolada em z_0 e é limitada numa vizinhança de z_0 então z_0 é uma singularidade removível de $g(z)$.

(b) Assumindo que existe um número complexo $a \in \mathbb{C}$ tal que a condição do enunciado não se verifica, mostre que a função $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ é limitada numa vizinhança de $z = z_0$.

(c) Mostre que se $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ tem uma singularidade removível em $z = z_0$ então $f(z)$ tem, ou um polo, ou uma singularidade removível em $z = z_0$.