

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Respostas à Ficha de Trabalho 4

1. (i) $v(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + 2y$; (ii) $u(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen}(2y)$;
(iii) $v(x, y) = \arctan \frac{y}{x} - 2x$ para $x \neq 0$ (não existe uma harmónica conjugada em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$); (iv) $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.
2. (a) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + 5$.
(b) $u(x, y) = 1 + x + 2y$ por exemplo. Usando funções holomorfas pode por exemplo tomar-se $u(x, y) = \operatorname{Re} \left(-i(z - 1)(z - i) + \frac{2}{1-i}z(z - i) - \frac{3}{1+i}z(z - 1) \right)$.
(c) $u(x, y) = e^x \cos y$.
3. a) $\frac{16}{3}(2 + 4i)$.
b) $32i$.
c) $8 + \frac{128}{5}i$.
4. (i) $\frac{e^2 - 1}{4}(1 + i)$.
(ii) $-\frac{\pi}{2}$.
(iii) 0.
(iv) $-8\pi i$.
(v) $-1 + \cos 1 + i \operatorname{sen} 1$.
5. (i) $2(i - 1)$.
(ii) $2\sqrt{2}i$.
7. a) Trata-se de uma espiral com extremidades em 1 e em 0. b): $-\frac{1}{2}$.
8. (e) (i) Diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.
(ii) Diferenciável em $z = 2$.
(iii) A função não é diferenciável em qualquer ponto.