Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 3

1. Determine ou mostre que não existe cada um dos seguintes limites.

   (i) $\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z^2+3iz-2}{z+i}$; (ii) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$; (iii) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{|z|}$; (iv) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$.

2. Determine o domínio de diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e calcule a derivada nesse domínio.

   (i) $f(z)=z^2\bar{z}$; (ii) $f(x+iy)=xy-ix$; (iii) $f(z)=\cos(3z)-i$;
   (iv) $f(z)=|z|\bar{z}$; (v) $f(x+iy)=x^2-y+i(x-y^2)$;
   (vi) $f(z)=e^{\bar{z}}$; (vii) $f(z)=z^5+\operatorname{sh}(e^{z^2})$; (viii) $f(z)=\bar{z}\operatorname{Im} z$.

3. Indique o domínio de analiticidade das funções do exercício anterior.

4. Calcule as derivadas das seguintes funções. Nas funções que envolvam a utilização do logaritmo considere o valor principal e indique a região em que a fórmula obtida é válida.

   (i) $\operatorname{sen}(z)+3z^2-ze^{z^3}$; (ii) $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ com $a,b,c,d\in\mathbb{C}$;
   (iii) $\cos(z)+(2z+1)^z$; (iv) $f(z)=\log(z^2+iz)$.

5. Considere a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=f(x+iy)=x^2-y^2+2i|xy|$.

   (a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

   (b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

6. Sejam α, $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funções diferenciáveis, e $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ a função definida por

   $$f(x+iy)=\alpha(x)-3xy^2+i(3x^2y+\beta(y))$$

   para $x,y\in\mathbb{R}$. Decida se pode ou não escolher α, β de modo a que f seja uma função inteira (isto é, holomorfa em $\mathbb{C}$). Em caso afirmativo, determine α, β de maneira a que $f(1)=i$ e $f(i)=-1$.

7. Seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que se verifica uma das condições

   (a) $\operatorname{Re} f(z)\equiv(\text{constante})$;

   (b) $f'(z)\equiv 0$;

   (c) $|f(z)|\equiv(\text{constante})$.

   Mostre que $f(z)\equiv(\text{constante})$.

8. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{se} \quad z \neq 0, \\ & \\ 0 & \text{se} \quad z = 0. \end{cases}$$

Mostre que f verifica as condições de Cauchy-Riemann no ponto $z = 0$, mas não admite derivada nesse ponto.