Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Respostas à Ficha de Trabalho 2

1. (i) 0; (ii) $-\frac{1}{3}i$; (iii) 0; (iv) 1; (v) ∞; (vi) não existe.

2. (i) Reta definida pela equação $x + 2y = 1$. Não é aberto.
   (ii) A região do plano à direita da parábola $x = \frac{1}{4}y^2 - 1$ (incluindo a parábola). Não é aberto.
   (iii) A reta definida pela equação $x + y = 1$. Não é aberto.
   (iv) A circunferência de raio 1 centrada em $(1 + i)$. Não é aberto.

3. (i) $e^2 \cos 1 + ie^2 \operatorname{sen} 1$; (ii) $\operatorname{ch} 3 \cos 2 - i \operatorname{sh} 3 \operatorname{sen} 2$; (iii) i.

4. (i) $u(x, y) = x - 2xy$, $v(x, y) = x^2 - y^2 - y$.
   (ii) $u(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $v(x, y) = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$.
   (iii) $u(x, y) = -y \operatorname{sh} y \cos x + x \operatorname{ch} y \operatorname{sen} x$, $v(x, y) = x \operatorname{sh} y \cos x + y \operatorname{ch} y \operatorname{sen} x$.

6. (i) $\{1 + (2k + 1)\pi i\colon k \in \mathbb{Z}\}$; (ii) $\{(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)i\colon k \in \mathbb{Z}\}$; (iii) $\{(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)i\colon k \in \mathbb{Z}\}$;
   (iv) $\{e^{2k\pi - i \log 2}\colon k \in \mathbb{Z}\}$; (v) $\{e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\colon k \in \mathbb{Z}\}$; (vi) $\{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}(1 + i)\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

7. (i) $z = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$; (ii) $z = (1 - e^{2\pi})i$;
   (iii) $z = 2k\pi - i \log(\sqrt{10} - 3)$ ou $z = (2k + 1)\pi - i \log(\sqrt{10} + 3), k \in \mathbb{Z}$;
   (iv) $z \in \mathbb{Z}$ ou $z = \pm i$; (v) $z = (2k + 1)\frac{\pi}{2} i, k \in \mathbb{Z}$; (vi) $z = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
   (vii) $z = \pm\sqrt{(2k + 1)\pi}\left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right), k = 0, 1, 2, \ldots$

8. (a) Sim; (b) Sim; (c) Não.

9. (a) $f(S) = \{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z) = \frac{\pi}{3}\}$.
   (b) $f(S) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = \frac{1}{2}\}$.
   (c) $f(S) = \{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| \leq e^2, \frac{2\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \frac{4\pi}{3}\}$.
   (d) $f(S) = \{z \in \mathbb{C}\colon \log 2 < \operatorname{Re}(z) < 1$ e $\left(\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im}(z) \leq \pi\right.$ ou $\left.-\pi < \operatorname{Im}(z) < -\frac{\pi}{4}\right)\}$.
   (e) $f(S) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$.
   (f) $f(S)$ é a elipse com centro na origem, com semi-eixos paralelos aos eixos dos xx e yy e comprimentos respectivamente $\operatorname{ch} 1$ e $\operatorname{sh} 1$.