Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 13

1. Calcule os desenvolvimentos indicados, dizendo para que função converge pontualmente a série obtida.

   (a) A série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

   (b) A série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

   $$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } \sin x > 0, \\ 0 & \text{se } \sin x \leqslant 0. \end{cases}$$

   (c) A série de senos de $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$.

   (d) A série de Fourier da função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ (deverá considerar a extensão periódica de f a $\mathbb{R}$).

   (e) A série de cosenos da função da alínea anterior.

2. Use o desenvolvimento em série de Fourier das funções indicadas num intervalo $[-L, L]$ com L apropriado para obter as identidades dadas por avaliação da série de Fourier num ponto apropriado.

   (a) $g(x) = L - |x|$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$.

   (b) $h(x) = x^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

   $$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \;\; x \in \,]0,\pi[\,, \quad \text{com} \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin(x) - 2\,\sin(5x). \end{cases}$$

4. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

   $$u_t = u_{xx} - u, \;\; x \in \,]0,L[\,, \quad \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

5. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

(a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$.

(c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = 20, \\ u(1,t) = 60, \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$$

6. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } \ x \in \,]0,1[\,, \\ u(0,t) = 0 & \text{se } \ t > 0, \\ u(1,t) = \sin 1 & \text{se } \ t > 0. \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) + \sin(x)\,.$$

7. Seja a função f definida no intervalo $(0,\pi)$ por $f(x) = \sin(x)$.

(a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.

(b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi,\pi]$.

(c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u,\ x \in \,]0,\pi[\,, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

8. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = 0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$ (satisfazendo a equação diferencial para $x \in \,]0,1[$), onde c é uma constante real positiva.

9. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad x, y \in [0,1] \, , \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \quad , \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x) \, , \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \quad , \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y) \, . \end{cases}$$

10. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, \pi[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x \ .$$

11. Seja f a função definida no intervalo $]0, 2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cosenos da função f.

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \ x \in]0, 2\pi[\, , \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

12. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x,0,t) = x \ , \quad u(x,1,t) = x, \\ u(0,y,t) = 0 \ , \quad u(1,y,t) = 1, \\ u(x,y,0) = x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos(2\pi\,(x-y)) - \cos(2\pi\,(x+y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.