TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2017/2018, 29/01/2018

Testes de Recuperação / Exame — versão B

LEIC-T, LEGI, LEE, LETI

1º Teste / Exame (1ª parte)

[2,5 val.] 1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = x^4 + y^4 - 6y^2x^2$$

(a) Determine a função inteira $f = u + \mathrm{i}v$ que verifica $f(\mathrm{i}) = 1$;

(b) Indique a função derivada f'.

[1,5 val.] 2. Para o caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, dado por $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}2\pi t}$, calcule o integral

$$\oint_\gamma \frac{az^7 + b\cos(3z) + ce^{-3z}}{z^4}\, dz$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

[3,0 val.] 3. Considere a função de variável complexa f definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}.$$

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f;

(b) Indique o raio de convergência da série de Taylor de f centrada no ponto $z = -\sqrt{2}$;

(c) Calcule, justificando, os integrais

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} f(z)\, dz \qquad \text{e} \qquad \oint_{|z-1|=1} f(e^z)\, dz$$

onde as curvas de Jordan são percorridas no sentido directo.

[2,0 val.] 4. Usando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 - 2x + 3}\, dx$$

[1,0 val.] 5. Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ e C o segmento de recta que une $-z$ a z. Considerando o valor principal do logaritmo, justifique que o integral

$$\int_C w \log w\, dw$$

está bem definido e calcule-o.

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte) — B

6. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$2ty - 1 + \left(y + \frac{t}{y}\right)\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 1\,.$$

[1,0 val.] (a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ para a equação diferencial.

[1,0 val.] (b) Determine explicitamente a solução $y = y(t)$ do PVI dado.

Sugestão: Caso não tenha resolvido a alínea (a), mostre que $\mu(y) = y^{-1}$ é um factor integrante para a equação diferencial; note que isso valerá somente cotação parcial na alínea (a).

[2,0 val.] 7. Calcule a solução geral do sistema de equações diferenciais $y' = Ay$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[2,0 val.] 8. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y = 25te^{-t}, & \text{se } t \geq 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

[2,5 val.] 9. Considere a função $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos de f e estude-a quanto à convergência pontual em $[0,2]$.

(b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (t-1)u & \text{para} \quad x \in]0,2[\ ,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,2) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{para} \quad x \in [0,2]. \end{cases}$$

[1.5 val.] 10. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{1 + t^2 + y^2} \\ \qquad y(0) = y_0 \end{cases}$$

onde $y_0 \geq 0$. Mostre que este problema tem solução única para todo o $t \geq 0$.