Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2017/2018

2º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

16 de Dezembro de 2017, 9h00m

Duração: 1h 30m

[2,5 val.] 1. Considere a seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos(2y)}.$$

Determine uma solução da equação que satisfaz $y(1/2) = 0$, indicando o intervalo máximo de existência e unicidade da solução.

Resolução: A equação pode ser escrita na forma

$$\cos(2y)\frac{dy}{dx} = 2x,$$

e é portanto separável. Temos então que

$$\cos(2y)\frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}(2y)}{2}\right) = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2y) = x^2 + C$$

e a solução geral é dada implícitamente por

$$\operatorname{sen}(2y) = 2x^2 + C,$$

onde C designa uma constante real. Atendendo ao valor inicial $y(1/2) = 0$ obtemos

$$C = \operatorname{sen}(0) - 2\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Resolvendo em ordem a y fica

$$y = y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{para } x \in \mathrm{I}_{\max}$$

onde $\mathrm{I}_{\max}$ é o intervalo máximo de existência e unicidade da solução. Para determinar $\mathrm{I}_{\max}$ note-se que

$$2x^2 - \frac{1}{2} \in]-1,1[\quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 \in]-1/2, 3/2[\quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 \in]0, 3/2[\quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[$$

A unicidade da solução decorre do facto de, ao PVI

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{2x}{\cos(2y)}, \quad y(1/2) = 0,$$

corresponder uma função f, de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que $(1/2, 0) \in U$. Conclui-se que $\mathrm{I}_{\max} =]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2[$.

[2,0 val.] 2. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + e^{3t} \end{cases}$$

Calcule a solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

Resolução:

Para determinar a solução geral do sistema temos

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 4x + e^{3t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ (x')' = 4x + e^{3t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x'' - 4x = e^{3t} \end{cases}$$

A equação em x é

$$x'' - 4x = e^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - 4)x = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad (D-3)(D-2)(D-2)x = 0$$

e tem solução geral dada por

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + x_p(t)$$

onde $x_p(t) = C_3 e^{3t}$. Aqui a solução particular é tal que

$$x_p'' - 4x_p = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad (9C_3 - 4C_3)e^{3t} = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{1}{5}.$$

Substituindo na outra equação obtemos a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{5} e^{3t} \\ y(t) = -2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{2t} + \frac{3}{5} e^{3t} \end{cases}$$

Calcular a solução do PVI passa por determinar C_1 e C_2 a partir dos valores iniciais. Então

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{5} = 0 \\ -2C_1 + 2C_2 + \frac{3}{5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{5} = 0 \\ 4C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{5} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

e a solução do PVI é

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} + \frac{1}{5} e^{3t} = \dfrac{e^{3t} - e^{-2t}}{5} \\ y(t) = \frac{2}{5} e^{-2t} + \frac{3}{5} e^{3t} = \dfrac{3e^{3t} + 2e^{-2t}}{5} \end{cases}$$

[2,0 val.] 3. Determine a solução geral da equação $y''' + y'' - 2y' = 4t$.

Resolução: A equação escreve-se na forma

$$\left(D^3 + D^2 - 2D\right) y = 4t, \tag{1}$$

onde $D = \frac{d}{dt}$. Além disso, o termo independente $h(t) = 4t$ é solução da equação diferencial

$$D^2 h = 0,$$

i. e. D^2 é o polinómio aniquilador de $4t$.

Então a solução de (1) é também solução da equação homogénea

$$D^3\left(D^2+D-2\right)y=0 \quad \Leftrightarrow \quad D^3(D-1)(D+2)y=0.$$

Para a solução escrevemos

$$y(t)=\underbrace{C_1e^t+C_2e^{-2t}+C_3}_{y_h(t)}+\underbrace{C_4t+C_5t^2}_{y_p(t)}, \tag{2}$$

onde $C_1,\dots,C_5$ são constantes reais. Para que (2) seja solução de (1), é necessário que

$$y_p'''+y_p''-2y_p=4t \quad \Leftrightarrow \quad 2C_5-2C_4-4C_5t=4t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2C_5-2C_4=0 \\ -4C_5=4 \end{cases}$$

Assim a solução geral da equação (1) é

$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t}+C_3-t-t^2.$$

[2,5 val.] 4. Considere o problema de valores inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u & \text{para} \quad 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 & \text{para} \quad t>0 \\ u(0,x)=f(x) & \text{para} \quad 0\le x\le \pi \end{cases} \tag{3}$$

(a) Determine a solução do problema indicado, para $f(x)=3\operatorname{sen}(2x)-\operatorname{sen}(5x)$.

(b) Determine a solução formal do problema indicado, para $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \pi & \text{se} \quad \frac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$$

Resolução:

(a) Vamos procurar soluções não nulas da forma $u(x,t)=T(t)X(x)$ para a equação diferencial parcial e condições auxiliares homogéneas. Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$T'(t)X(x)=3T(t)X''(x)+T(t)X(x) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{3T(t)}-\frac{1}{3}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t)=(3\lambda+1)T(t) \\ X''(x)-\lambda X(x)=0. \end{cases}$$

Das condições de fronteira, $u(t,0)=u(t,\pi)=0$ resulta, para as soluções não nulas da forma $T(t)X(x)$, que

$$T(t)X(0)=T(t)X(\pi)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X(0)=0 \\ X(\pi)=0 \end{cases}$$

Resolvemos, em primeiro lugar, o problema de valores próprios (para $x \in [0, \pi]$):

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad ; \qquad X(0) = X(\pi) = 0. \tag{4}$$

O polinómio característico da equação diferencial, $(D^2 - \lambda)X = 0$, tem raízes $\pm\sqrt{\lambda}$, pelo que a expressão para as soluções da equação (4) dependem do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{x\sqrt{\lambda}} + Ce^{-x\sqrt{\lambda}} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + C\,\mathrm{sen}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B e C são constantes reais. Impondo as condições de fronteira às soluções, $X(x)$, acima determinadas, temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} B + C = 0 \\ Be^{\pi\sqrt{\lambda}} + Ce^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = -B \\ B(e^{\pi\sqrt{\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\lambda}}) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = 0 \\ B = 0 \end{array} \right.$$

(ii) Para $\lambda = 0$ resulta que $B = C = 0$.

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ B\cos\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) + C\,\mathrm{sen}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda} = n \end{array} \right.$$

donde obtemos as soluções $X(x) = C\,\mathrm{sen}(nx)$ com $n = 1, 2, \ldots$ (correspondem a $\sqrt{-\lambda} = n$ e $\lambda = -n^2$).

Em consequência, as soluções do problema de valores próprios são:

$$\lambda_n = -n^2 \qquad , \qquad X_n(x) = \mathrm{sen}(nx) \qquad , \quad \text{com } \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo os possíveis valores de λ na equação para T e juntando a condição inicial já obtida, temos:

$$T' = -(3n^2 - 1)T.$$

As soluções desta equação são da forma $T(t) = Ke^{-(3n^2-1)t}$, com $K \in \mathbb{R}$. As soluções da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são (a menos do produto por uma constante) funções da forma:

$$Ke^{-(3n^2-1)t}\,\mathrm{sen}(nx) \qquad \text{com} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Por observação da condição inicial

$$u(0, x) = f(x) \qquad \text{com } f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2x) - \mathrm{sen}(5x)$$

temos que a solução do problema é

$$u(x, t) = 3e^{-11t}\,\mathrm{sen}(2x) - e^{-74t}\,\mathrm{sen}(5x).$$

(b) Procuramos agora a solução formal do problema (3) para a condição inicial

$$u(0, x) = f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{se} & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi & \text{se} & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{array} \right.$$

Utilizando o resultado da alínea (a), temos:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^{-(3n^2+1)t}\,\mathrm{sen}(nx)$$

de forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \operatorname{sen}(nx) = u(x,0) = f(x)$$

Assim os coeficientes K_n são os coeficientes de Fourier da série de senos de f. Logo

$$K_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{2}{n}\left(\cos(n\pi/2) - (-1)^n\right)$$

Assim sendo, a solução (formal) do problema (3) é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{n}\left(\cos(n\pi/2) - (-1)^n\right) e^{-(3n^2-1)t}\operatorname{sen}(nx).$$

[1,0 val.] 5. Considere um sistema de equações lineares de primeira ordem $x' = \mathbf{A}x$, onde **A** é uma matriz $n \times n$ com componentes reais. Determine justificando, que condições deve satisfazer a matriz **A** por forma a garantir a existência de soluções $x = x(t)$, não nulas, tais que a função $f(t) = ||x(t)||$ é limitada para $t \in \mathbb{R}$.

Resolução: Para qualquer matriz **A** $n \times n$ existe um par valor/vector próprio λ e $v \neq 0$ tal que

$$\mathbf{A}v = \lambda v$$

Se λ é um real, então para cada par (λ, v) existem soluções do sistema

$$x_\lambda(t) = C\, v\, e^{\lambda t}$$

onde C é uma constante real.

Se λ é um complexo $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ então o par conjugado $(\bar{\lambda}, \bar{v})$ é também um par valor/vector próprio de **A**, pois esta é uma matriz real, logo existem soluções do sistema

$$x_\lambda^{(1)}(t) = C_1\, v_r\, e^{\alpha t}\cos(\beta t), \qquad x_\lambda^{(2)}(t) = C_2\, v_i\, e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

onde $v = v_r + \mathrm{i}v_i$ e C_1, C_2 são constantes reais.

Para ter soluções do sistema limitadas, i. e. $||x_\lambda(t)|| \leq M$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ basta que **A** verifique uma das condições

- **A** tem um valor próprio nulo, i. e. $\lambda = 0$;
- **A** tem valores próprios complexos imaginários puros, i.e. $\lambda = \pm\mathrm{i}\beta$.