

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2017/2018

1º Teste, versão B

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

4 de Novembro de 2017, 9h00m

Duração: 1h 30m

[1,0 val.]

1. Calcule todas as soluções $z \in \mathbb{C}$, da equação

$$(5i - z^3)(z - \bar{z}) = 0.$$

[3,0 val.]

2. Sejam α e β duas constantes reais e $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $u(x, y) = \alpha xy^2 - \beta x^3 - \beta y$.

a) Indique o conjunto dos valores de α e de β para os quais u é uma função harmónica.

b) Considerando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, determine uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y) \quad \text{e} \quad f(0) = -i$$

c) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=20} \frac{f(z)}{(z+i)^2} dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.]

3. Seja C uma curva seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, que une o ponto $i - 1$ ao ponto $i + 1$. Calcule, justificando, o valor do integral

$$\int_C \frac{1}{(z+1)^2} dz,$$

[2,5 val.]

4. a) Considere a função complexa de variável complexa definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2} + \frac{1}{(z + \pi)^2}.$$

Classifique todas as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno de $z = 0$, indicando o domínio onde este desenvolvimento é válido.

[1,5 val.]

5. Usando o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \theta}{2 + \operatorname{sen} \theta} d\theta.$$

Justifique a resposta.

[1,0 val.]

6. Considere $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto z^α é finito se e só se $\alpha \in \mathbb{Q}$.