Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2017/2018

1º Teste, versão A

(Cursos: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

4 de Novembro de 2017, 9h00m

Duração: 1h 30m

[1,0 val.] 1. Calcule todas as soluções $z \in \mathbb{C}$, da equação

$$\left(z^3 + 2\mathrm{i}\right)\left(z + \overline{z}\right) = 0.$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\left(z^3 + 2\mathrm{i}\right)\left(z + \overline{z}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z + \overline{z} = 0 \quad \text{ou} \quad z^3 = -2\,\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad z = \sqrt[3]{2}e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)/3}, \quad k = 0,1,2 \\
&\Leftrightarrow \quad z = \mathrm{i}y \text{ para qualquer } y \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt[3]{2}e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3})}, \quad k = 0,1,2.
\end{aligned}$$

[3,0 val.] 2. Sejam α e β duas constantes reais e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x,y) = \alpha\, x^2 y + \beta x + \beta y^3$.

a) Indique o conjunto dos valores de α e de β para os quais u é uma função harmónica.

b) Considerando $\alpha = 3$ e $\beta = -1$, determine uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) \qquad \text{e} \qquad f(0) = \mathrm{i}.$$

c) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução:

a) Para que u seja uma função harmónica deve estar na classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e ser solução da equação de Laplace. De facto, u é polinomial, em x e y, e ainda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\alpha + 6\beta)y = 0 \text{ para qualquer } y \in \mathbb{R}.$$

Então u é harmónica para os valores de α e de β tais que $\alpha = -3\beta$.

b) Seja $u(x,y) = 3x^2y - x - y^3$. Para que $f = u + \mathrm{i}v$ seja inteira é necessário que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y - x - y^3\right) = 6xy - 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y - x - y^3\right) = -3x^2 + 3y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} v(x,y) = 3xy^2 - y + C(x) \\ 3y^2 + C'(x) = -3x^2 + 3y^2 \end{cases}$$

Da segunda equação conclui-se que $C'(x) = -3x^2$ pelo que $C(x) = -x^3 + C$ onde C é uma constante real. Como $f(0) = \mathrm{i}$, tem-se $v(0,0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$ e portanto

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) = 3x^2y - x - y^3 + \mathrm{i}(3xy^2 - y - x^3 + 1).$$

c) Sendo f inteira e o número i está contido no interior da circunferência, a fórmula integral de Cauchy garante que

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz = -2\pi\mathrm{i}f'(\mathrm{i}).$$

Por outro lado

$$f'(x+\mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 1 + \mathrm{i}3(y^2 - x^2),$$

pelo que o valor do integral é

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz = -2\pi\mathrm{i}(-1+\mathrm{i}3) = 2\pi(3+\mathrm{i})$$

[1,0 val.] 3. Seja C uma curva seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$, que une o ponto $1-\mathrm{i}$ ao ponto $1+\mathrm{i}$. Calcule, justificando, o valor do integral

$$\int_C \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz.$$

Resolução:

A função integranda é tal que

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{z-\mathrm{i}}\right) \quad \text{para qualquer } z \neq \mathrm{i}$$

logo é primitivável em $\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$. Então do teorema fundamental do cálculo temos

$$\int_C \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz = \left.\frac{-1}{z-\mathrm{i}}\right|_{z=1-\mathrm{i}}^{z=1+\mathrm{i}} = \frac{-1}{1+\mathrm{i}-\mathrm{i}} - \frac{-1}{1-\mathrm{i}-\mathrm{i}} = -1 + \frac{1}{1-2\mathrm{i}} = -\frac{4}{5} + \frac{2\mathrm{i}}{5}$$

para qualquer curva C nas condições indicadas.

[2,5 val.] 4. a) Considere a função complexa de variável complexa definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^2} + \frac{1}{(z-\mathrm{i}\pi)^2}.$$

Classifique todas as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno de $z=0$, indicando o domíno onde este desenvolvimento é válido.

Resolução:

a) As singularidades de f são em $z=0$ e $z=\mathrm{i}\pi$. Aplicando judiciosamente a regra de Cauchy obtêm-se os limites

$$\lim_{z\to 0} z\,f(z) \;=\; \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{-z}}{z} + \frac{z}{(z-\mathrm{i}\pi)^2} \;=\; \lim_{z\to 0} e^{-z} = 1$$

e

$$\lim_{z\to \mathrm{i}\pi} (z-\mathrm{i}\pi)^2\,f(z) \;=\; \lim_{z\to \mathrm{i}\pi} \frac{(z-\mathrm{i}\pi)^2(1-e^{-z})}{z} + 1 \;=1.$$

Em conta que estes limites são finitos e não nulos conclui-se que $z=0$ é um pólo simples e $z=\mathrm{i}\pi$ um pólo de ordem 2 da função f. Os respectivo resíduos são

$$\mathrm{Res}(f, z=0) = 1$$

e

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}\pi) = \lim_{z\to \mathrm{i}\pi} \frac{d}{dz}\Big((z-\mathrm{i}\pi)^2 f(z)\Big) = 0.$$

b) O desenvolvimento em série de MacLaurin da exponencial complexa permite escrever

$$\frac{1-e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2}(1-e^{-z}) = \frac{1}{z^2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}z^{n-2}$$

válido para $|z|>0$.
Por outro lado, a fórmula da soma de uma série geométrica determina

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-\mathrm{i}\pi)^2} &= \frac{d}{dz}\Big(\frac{-1}{z-\mathrm{i}\pi}\Big) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\mathrm{i}\pi}}\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{\mathrm{i}\pi}\Big)^n\right) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\Big(\Big(\frac{z}{\mathrm{i}\pi}\Big)^n\Big)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\mathrm{i}\pi)^{n+1}}z^{n-1}\end{aligned}$$

válido para $|z|<\pi$.
Assim o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno do ponto $z=0$ é

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}z^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\mathrm{i}\pi)^{n+1}}z^{n-1}\\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)!} + \frac{n}{(\mathrm{i}\pi)^{n+1}}\right)z^{n-1},\end{aligned}$$

válido para $0<|z|<\pi$.

[1,5 val.] 5. Usando o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta\,.$$

Justifique a resposta.

Resolução: A definição de coseno complexo

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$$

significa que

$$\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta} = \frac{\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)}{2+\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\frac{\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)}{2+\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)}\frac{d(e^{\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}} = \oint_{|z|=1}\frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{\mathrm{i}z}\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)}\,dz.\end{aligned}$$

A função integranda $f(z)=\frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)}$ tem singularidades em $z=0$ e $z=-2\pm\sqrt{3}$ das quais apenas $z=0$ e $z=-2+\sqrt{3}$ se encontram no interior da circunferência unitária. Aplicando o teorema dos resíduos escrevemos

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\Big(\mathrm{Res}(f,z=0)+\mathrm{Res}\big(f,z=-2+\sqrt{3}\big)\Big)$$

Dado que as singularidades são pólos simples de f temos

$$\operatorname{Res}(f, z=0) = \lim_{z\to 0} z\, f(z) \;= 1$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\big(f, z=-2+\sqrt{3}\big) &= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} (z-(-2+\sqrt{3}))\, f(z) \;= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{z^2+1}{z(z-(-2-\sqrt{3}))} \\ &= \frac{(-2+\sqrt{3})^2+1}{(-2+\sqrt{3})(-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3})} = \frac{3-4\sqrt{3}+4+1}{(-2+\sqrt{3})2\sqrt{3}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

logo conclui-se

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

[1,0 val.] 6. Considere $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto z^α é finito se e só se $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Resolução:

Para $z \neq 0$ e α um real temos

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(z)} = e^{\alpha \log|z| + \mathrm{i}\alpha \operatorname{Arg}(z)} = e^{\alpha \log|z|} e^{\mathrm{i}\alpha \operatorname{Arg}(z)} = e^{\alpha \log|z|} e^{\mathrm{i}\alpha \arg(z)} e^{\mathrm{i}\alpha 2\pi k}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim o conjunto z^α é finito se e só se o conjunto $\{e^{2\pi \mathrm{i}\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\}$ é finito.

Se $\alpha \in \mathbb{Q}$ então $\alpha = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}_1$, temos $\{e^{2\pi \mathrm{i}\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2\pi \mathrm{i}\alpha k} : k = 0, 1, \ldots, p-1\}$ é um conjunto finito. Reciprocamente se o conjunto $\{e^{2\pi \mathrm{i}\alpha k} : k \in \mathbb{Z}\}$ é finito existe um $k \in \mathbb{N}_1$ tal que $e^{2\pi \mathrm{i}\alpha k} = 1$, i. e. $\alpha k = m \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$.