Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2017/2018

1º Teste, versão A

(Cursos: LEIC-T, LEGI, LEE, LETI)

4 de Novembro de 2017, 9h00m

Duração: 1h 30m

[1,0 val.] 1. Calcule todas as soluções $z \in \mathbb{C}$, da equação

$$\left(z^3 + 2\mathrm{i}\right)\left(z + \overline{z}\right) = 0.$$

[3,0 val.] 2. Sejam α e β duas constantes reais e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x, y) = \alpha\, x^2 y + \beta x + \beta y^3$.

a) Indique o conjunto dos valores de α e de β para os quais u é uma função harmónica.

b) Considerando $\alpha = 3$ e $\beta = -1$, determine uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) \qquad \text{e} \qquad f(0) = \mathrm{i}.$$

c) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z - \mathrm{i})^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

[1,0 val.] 3. Seja C uma curva seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$, que une o ponto $1 - \mathrm{i}$ ao ponto $1 + \mathrm{i}$. Calcule, justificando, o valor do integral

$$\int_C \frac{1}{(z - \mathrm{i})^2}\, dz.$$

[2,5 val.] 4. a) Considere a função complexa de variável complexa definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^2} + \frac{1}{(z - \mathrm{i}\pi)^2}.$$

Classifique todas as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent em torno de $z = 0$, indicando o domíno onde este desenvolvimento é válido.

[1,5 val.] 5. Usando o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2 + \cos\theta}\, d\theta\,.$$

Justifique a resposta.

[1,0 val.] 6. Considere $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto z^α é finito se e só se $\alpha \in \mathbb{Q}$.