TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2014/2015, 29/06/2015

Testes de Recuperação / Exame — versão B

LEIC-T, LEGI, LEE, LERC

1º Teste / Exame (1ª parte)

[1,0 val.] 1. Calcule todas as soluções $z \in \mathbb{C}$, da equação

$$\left(z^4 + \mathrm{i}\right) \cos(\mathrm{i}z) = 0.$$

[1,0 val.] 2. Esboce a região $R = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| < 1 \text{ e } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ e a sua imagem $f(R)$, pela função $f(z) = \frac{1}{z}$.

[3,0 val.] 3. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x, y) = 3x^2 + \beta(y),$$

em que $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real com segunda derivada contínua.

(a) Identifique todas as funções β tal que a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Considere $\beta(y) = -3y^2 - y$. Determine a função inteira $f = u + \mathrm{i}v$ que verifica $f(-\mathrm{i}) = -4$.

(c) Calcule o integral:

$$\oint_{|z|=2015} \frac{z f(z)}{(z + \mathrm{i})^2}\, dz\ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

[1,5 val.] 4. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\sqrt{3}\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z}{3 + z^2} - z^2 e^{-iz}.$$

Determine o desenvolvimento em série de Taylor, com centro em $z = 0$, e o respectivo domínio de validade.

[2,5 val.] 5. Considere a função complexa de variável complexa, f, definida no seu domínio por:

$$f(z) = \frac{2}{(z+4)^3} + \frac{e^{-\pi z} - 1}{(z+2)(z+2\mathrm{i})} - \frac{e^{-1/z}}{2z}$$

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

(b) Calcule o valor de $\oint_\gamma f(z)\, dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 1/2$ percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.] 6. Considere uma função inteira f, com um zero de ordem $N \in \mathbb{N}$ no ponto $a \in \mathbb{C}$. Mostre que existe um real $\epsilon > 0$ tal que

$$\oint_{|z-a|=\epsilon} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi\mathrm{i}N.$$

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte) — B

[2,0 val.] 7. Considere a equação diferencial:

$$\frac{\cos(y)}{t} + (\operatorname{sen}(y) + t)\,\frac{dy}{dt} = 0.$$

Calcule um factor integrante $\mu = \mu(t)$ para a equação e determine a solução definida numa vizinhança de $t = 1$ e que verifica $y(1) = 0$.

[2,5 val.] 8. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}(t) = e^t \begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine e^{At} .

(b) Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{B}(t) \quad , \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

é $\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ te^t \end{bmatrix}$.

[2,0 val.] 9. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y = 2 - t, & \text{se } t \geq 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

[2,5 val.] 10. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para} \quad x \in]0,1[\ ,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{para} \quad x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{3}\} \end{cases}$$

onde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{se} \quad \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Determine a série de cossenos de f e estude-a quanto à convergência pontual em $[0,1]$.

(b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira.

[1.0 val.] 11. Usando o método da separação de variáveis obtenha uma solução do problema:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad u(0,y) = 2e^{-4y} + e^y$$

onde c é uma constante real.