

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2014/2015

2º Teste, versão B

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LERC)

30 de Maio de 2015, 11h00m

Duração: 1h 30m

[1,0 val.]

1. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' - \frac{1}{2t}y = 5t + 1.$$

[2,0 val.]

2. Considere a seguinte equação diferencial

$$t(3t + 2e^y) + t^2e^y \frac{dy}{dt} = 0.$$

Mostre que a equação é exacta e calcule, justificando, a solução da equação que verifica $y(1) = 0$ e o respectivo intervalo máximo de existência e unicidade.

[2,0 val.]

3. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

 (a) Calcule e^{At} .

(b) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[2,0 val.]

4. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y' - 2y = e^{-5t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

[2,0 val.]

5. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de senos da função
- $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$
- dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Indique a soma da série para cada $x \in [0, 2]$.

 (b) Determine a solução do problema, para $x \in [0, 2]$, $t > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, \quad \begin{cases} u(0, t) = u(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

[1,0 val.]

6. Seja
- A
- uma matriz
- 2×2
- e
- \mathbf{v}, \mathbf{w}
- vectores não nulos, tais que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{e} \quad A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} + \mathbf{v},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Determine as soluções do sistema $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ da forma $\mathbf{Y}(t) = c(t)\mathbf{v} + d(t)\mathbf{w}$ onde c e d são funções escalares de variável real.