

*Análise Complexa e Equações Diferenciais*  
2º Semestre 2013/2014

2º Teste, versão B

(CURSOS: LEIC, MEEC, LEMAT, MEAER, MEBIOL, MEQ, MEAMBI)

31 de Maio de 2014, 11h30m

**Duração: 1h 30m**

[1,5 val.]

1. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x-1} = x.$$

Determine a solução que satisfaz  $y(0) = 1$  e o respectivo intervalo máximo de existência.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

[1,5 val.]

- (a) Determine  $e^{At}$ .

[0,5 val.]

- (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y}(0) = (0, 0)$$

em que  $\mathbf{b} = (3, 1)$ .

[2,0 val.]

3. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 11 - 6t, & \text{se } t \geq 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

4. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{para } x \in ]0, \pi[, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & \text{para } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

onde  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

[1,0 val.]

- (a) Determine a série de senos de  $f$  em  $[0, \pi]$ .

[1,5 val.]

- (b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira.

[0,5 val.]

- (c) Justifique que a série obtida na alínea (b) converge em qualquer  $(x, t)$  tal que  $x \in [0, \pi]$  e  $t \geq 0$ .

[1,5 val.]

5. Mostre que o conjunto das funções  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis e que satisfazem

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = 3\sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(1) = 1,$$

possui, pelo menos, dois elementos distintos. Explique porque razão este facto não contradiz o teorema de Picard-Lindeloff.