TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2013/2014

1º Teste, versão B

(Cursos: LEIC, MEEC, LEMat, MEAer, MEBiol, MEQ, MEAmbi)

5 de Abril de 2014, 11h30m

Duração: 1h 30m

1. Seja $\beta \in C^2(\mathbb{R})$ e a função $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $v(x, y) = 6x^2y + 2y(x + y) - \beta(y)$.

[1,0 val.] a) Identifique todas as funções β tais que v é uma função harmónica.

[1,0 val.] b) Considere $\beta(y) = 2y^3 + 2y^2$. Determine uma função inteira f tal que

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) \quad \text{e} \quad f(1) = 0.$$

[0,5 val.] c) Calcule a função derivada $f'(x + iy)$.

[0,5 val.] d) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z+1)^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

[1,5 val.] 2. Determine o desenvolvimento em série de Laurent válido para $|z - 1| > \sqrt{2}$ da função $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -i\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}\,.$$

3. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + \pi z} + e^{1/(z-1)}\,.$$

[1,5 val.] a) Classifique todas as singularidades de f e determine os seus resíduos.

[0,5 val.] b) Calcule o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez (em sentido directo).

4. Para cada $R > 3$ considere o caminho $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, e o caminho fechado simples positivamente orientado $\Gamma_R = [-R, R] + \gamma_R$.

[1,0 val.] a) Use o teorema dos resíduos para calcular $\displaystyle\oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(9+z^2)^2}\, dz\,.$

[0,5 val.] b) Obtenha a seguinte majoração: $\displaystyle\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(9+z^2)^2}\, dz\right| \leqslant \frac{\pi R^3}{(R^2-9)^2}\,.$

[1,0 val.] c) Usando as duas alíneas anteriores, calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(9+x^2)^2}\, dx\,,$

[1,0 val.] 5. Calcule o integral

$$\int_\gamma \log(3z)\, dz$$

em que γ é um caminho regular, simples, contido em $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi} : r \geq 0\}$, que une 1 a $-\mathrm{i}$ e $\log$ é o valor principal do logaritmo. Justifique **cuidadosamente** a sua resposta.