Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2013/2014

1º Teste, versão A

(Cursos: LEIC, MEEC, LEMat, MEAer, MEBiol, MEQ, MEAmbi)

5 de Abril de 2014, 11h30m

Duração: 1h 30m

1. Seja $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$ e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $u(x,y) = \alpha(x) - 3xy^2 - 2y^2$.

[1,0 val.] a) Identifique todas as funções α tais que u é uma função harmónica.

[1,0 val.] b) Considere $\alpha(x) = x^3 + 2x^2$. Determine uma função inteira f tal que

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) \quad \text{e} \quad f(-1) = 1.$$

[0,5 val.] c) Calcule a função derivada $f'(x + \mathrm{i}y)$.

[0,5 val.] d) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução:

a) A função u é harmónica sse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Assim temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha''(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x - 4$$

e portanto u é harmónica sse

$$\alpha''(x) = 6x + 4 \Leftrightarrow \alpha(x) = x^3 + 2x^2 + Ax + B,$$

onde A e B são constantes reais.

b) Para que $f = u + iv$ seja inteira é necessário que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 2x^2 - 3xy^2 - 2y^2\right) = 3x^2 + 4x - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 2x^2 - 3xy^2 - 2y^2\right) = 6xy + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x + C'(y) = 3x^2 + 4x - 3y^2 \\ v(x,y) = 3x^2 y + 4xy + C(y) \end{cases}$$

Da primeira equação conclui-se que $C'(y) = -3y^2$ pelo que $C(y) = -y^3 + C$ onde C é uma constante real. Como $f(-1) = 1$, tem-se $v(-1,0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$ e portanto

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^3 + 2x^2 - 3xy^2 - 2y^2 + \mathrm{i}(3x^2 y + 4xy - y^3).$$

c) Dado que f é diferenciável em qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$ temos

$$f'(x + \mathrm{i}y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 + 4x - 3y^2 + \mathrm{i}(6xy + 4y).$$

d) Sendo f inteira e $|1| < 3$, a fórmula integral de Cauchy garante que

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz = -2\pi \mathrm{i} f'(1) = -14\pi \mathrm{i}$$

[1,5 val.] 2. Determine o desenvolvimento em série de Laurent válido para $|z+1| > \sqrt{2}$ da função $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, i\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)}\,.$$

Resolução: Pela fórmula da soma da série geométrica obtemos

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z+1-1-i} = \\ = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+i}{z+1}} = \frac{1}{(z+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{z+1}\right)^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(z+1)^{n+2}} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1+i}{(z+1)^3} + \frac{(1+i)^2}{(z+1)^4} + \ldots \end{aligned}$$

Atendendo à região de validade da fórmula da série geométrica, a quinta igualdade é válida se e só se

$$\left|\frac{1+i}{z+1}\right| < 1\,, \quad \text{ou seja, se e só se} \quad |z+1| > |1+i| = \sqrt{2},$$

o que estabelece a região de validade da série de Laurent obtida.

3. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 - 4z} + e^{1/(z-2)}\,.$$

[1,5 val.] a) Classifique todas as singularidades de f e determine os seus resíduos.

[0,5 val.] b) Calcule o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} f(z)\,dz$$

onde a curva é percorrida uma vez (em sentido directo).

Resolução:

a) Considere-se $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, com

$$f_1(z) = e^{1/(z-2)} \quad \text{e} \quad f_2(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 - 4z}.$$

As singularidades de f são $z = 2$, proveniente de f_1, e $z = 0$ e $z = 4$, provenientes de f_2.
A função f_1 é holomorfa em $z = 0$ e $z = 4$, donde a sua contribuição para as correspondentes séries de Laurent de f, em torno destas singularidades, faz-se apenas nas potências positivas (na parte regular) das séries. A parte principal das séries de Laurent e, consequentemente, os resíduos nestes dois pontos, provém apenas de f_2, pelo que podemos concluir que $\operatorname{Res}(f, 0) = \operatorname{Res}(f_2, 0)$ e $\operatorname{Res}(f, 4) = \operatorname{Res}(f_2, 4)$.
Ora (usando, por exemplo, a regra de Cauchy):

$$\lim_{z\to 0} f_2(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-4)} = \frac{1}{0-4} \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = -\frac{1}{4}$$

pelo que esta singularidade é removível e $\operatorname{Res}(f, 0) = \operatorname{Res}(f_2, 0) = 0$.
Relativamente a $z = 4$, e tendo em conta que

$$\lim_{z\to 4} (z-4) f_2(z) = \lim_{z\to 4} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{\operatorname{sen} 4}{4},$$

o que nos leva a concluir que se trata de um pólo simples e que o valor deste limite é, por isso, o seu resíduo. Assim $\mathrm{Res}(f,4) = \mathrm{Res}(f_2,4) = \frac{\mathrm{sen}\, 4}{4}$.

Por outro lado, $z = 2$ é singularidade de f proveniente apenas de f_1, pois f_2 é holomorfa em $z = 2$. Tal como anteriormente, podemos concluir que tanto a parte principal da série de Laurent (e, consequentemente, o resíduo) naquele ponto provém apenas de f_1; assim sendo, $\mathrm{Res}(f,2) = \mathrm{Res}(f_1,2)$.

Expandindo f_1 em série de Laurent válida na região dada por $|z-2| > 0$:

$$f_1(z) = e^{1/(z-2)} = 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \cdots$$

Assim sendo, $z = 2$ é uma singularidade essencial de f_1 (e, também, de f), sendo que $\mathrm{Res}(f,2) = \mathrm{Res}(f_1,2) = a_{-1} = 1$.

b) O caminho, que aqui representamos por γ, é constituido por uma circunferência de centro na origem e raio 3; as singularidades que se encontram no interior de γ são as que verificam a condição $|z| < 3$, ou seja, $z = 0$ e $z = 2$. Por outro lado, $z = 4$ verifica $|z| > 3$, pelo que está no exterior de γ. De acordo com o teorema dos resíduos:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \Big(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2) \Big) = 2\pi\mathrm{i}\,(0+1) = 2\pi\mathrm{i}$$

4. Para cada $R > 2$ considere o caminho $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, e o caminho fechado simples positivamente orientado $\Gamma_R = [-R,R] + \gamma_R$.

[1,0 val.] a) Use o teorema dos resíduos para calcular $\displaystyle\oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(4+z^2)^2}\,dz\,.$

[0,5 val.] b) Obtenha a seguinte majoração: $\displaystyle\left| \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(4+z^2)^2}\,dz \right| \leqslant \frac{\pi R^3}{(R^2-4)^2}\,.$

[1,0 val.] c) Usando as duas alíneas anteriores, calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2}\,dx\,,$

Resolução:

a) Seja $f(z) = \frac{z^2}{(4+z^2)^2}$. Trata-se de uma função holomorfa no plano complexo exceptuando as singularidades isoladas $-2\mathrm{i}$, $2\mathrm{i}$. Para $R > 2$,

$$-2\mathrm{i} \in \operatorname{ext}\Gamma_R\,, \quad 2\mathrm{i} \in \operatorname{int}\Gamma_R\,.$$

Por outro lado, por factorização polinomial, $f(z) = \frac{z^2}{((z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i}))^2} = \frac{z^2}{(z+2\mathrm{i})^2(z-2\mathrm{i})^2}$, e, portanto,

$$\lim_{z\to 2i} (z-2\mathrm{i})^2 f(z) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{z^2}{(z+2\mathrm{i})^2} = \frac{(2\mathrm{i})^2}{(4\mathrm{i})^2} = \frac{1}{4} \neq 0\,.$$

Concluimos assim que $f(z)$ tem um polo duplo em $2\mathrm{i}$ e que, portanto, o respectivo resíduo é dado por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,2\mathrm{i}) &= \lim_{z\to 2i} \big((z-2\mathrm{i})^2 f(z) \big)' = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \left(\frac{z^2}{(z+2\mathrm{i})^2} \right)' = \\
&= \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{2z(z+2\mathrm{i})^2 - 2(z+2\mathrm{i})z^2}{(z+2\mathrm{i})^4} = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{2z(z+2\mathrm{i}) - 2z^2}{(z+2\mathrm{i})^3} = \\
&= \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{4\mathrm{i}z}{(z+2\mathrm{i})^3} = -\frac{8}{(4\mathrm{i})^3} = \frac{1}{8\mathrm{i}}\,.
\end{aligned}$$

Usando o teorema dos resíduos, obtemos finalmente

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,2\mathrm{i}) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{8i} = \frac{\pi}{4}\,.$$

b) Como $z \in \gamma_R \Rightarrow |z| = R$, e como para o comprimento do caminho γ_R se tem $L_{\gamma_R} = \pi R$, usando a fórmula de majoração do integal complexo, obtemos

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(4+z^2)^2}\, dz \right| \leqslant L_{\gamma_R} \sup_{z\in\gamma_R} \left| \frac{z^2}{(4+z^2)^2} \right| \leqslant \pi R \sup_{z\in\gamma_R} \frac{|z|^2}{|4-|z|^2|^2}$$
$$= \pi R \frac{R^2}{|4-R^2|^2} = \frac{\pi R^3}{(R^2-4)^2}\,.$$

c) Obviamente $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é uma função par em $\mathbb{R}$. Por este facto,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx\,.$$

De a) concluimos que

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \frac{\pi}{4}\,.$$

De b), pelo facto de que $\frac{\pi R^3}{(R^2-4)^2} \to 0$, quando $R \to +\infty$, concluimos que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0\,.$$

Logo, tomando limites, quando $R \to +\infty$, na igualdade

$$\int_{-R}^{+R} f(x)\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz\,,$$

obtemos

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx = \frac{\pi}{4}\,,$$

e, portanto,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi}{8}\,.$$

[1,0 val.] 5. Calcule o integral

$$\int_\gamma \log(2z)\, dz$$

em que γ é um caminho regular, simples, contido em $\mathbb{C} \setminus \{re^{\mathrm{i}\pi} : r \geq 0\}$, que une i a 1 e $\log$ é o valor principal do logaritmo. Justifique **cuidadosamente** a sua resposta.

Resolução:

Considere-se a função $f(z) = \log(2z)$, onde $\log$ é o valor principal do logaritmo. Esta função está definida e é analítica no conjunto $D = \mathbb{C} \setminus \{re^{\mathrm{i}\pi} : r \geq 0\}$. Se u e v forem funções analíticas em D então, a partir da regra de derivação do produto, obtém-se fórmula de primitivação por partes (que será válida em conjuntos onde existam as primitivas mencionadas):

$$P\Big(u'(z)v(z)\Big) = u(z)v(z) - P\Big(u(z)v'(z)\Big)$$

(a notação $Pf(z)$ representa uma primitiva de $f(z)$). Definimos então $F(z)$ através da fórmula anterior, aplicada a $u(z) = z$ e $v(z) = \log(2z)$:

$$F(z) = P\Big(1\ \log(2z)\Big) = z\log(2z) - P\Big(z\frac{2}{2z}\Big) = z\log(2z) - P\ 1 = z\log(2z) - z$$

Note que $F(z)$ é analítica em D e, para qualquer $z \in D$,

$$F'(z) = \log(2z) - z\frac{2}{2z} - 1 = \log(2z),$$

o que justifica que $F(z)$ é uma primitiva de $f(z)$ em D.

Pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\int_\gamma \log(2z)\, dz = F(1) - F(i) = \log 2 - 1 - \mathrm{i}\log(2\mathrm{i}) + \mathrm{i}$$

O valor principal de $\log(2\mathrm{i})$ é $\log 2 + \frac{\mathrm{i}\pi}{2}$, pelo que:

$$\int_\gamma \log(2z)\, dz = \log 2 - 1 + \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\big(1 - \log 2\big)$$