TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2013/2014, 30/06/2014

Testes de Recuperação / Exame — versão B

LEIC-A, MEEC, LEMAT, MEAER, MEBIOL, MEQ, MEAMBI

1º Teste / Exame (1ª parte)

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = ay^2 - bx^2,$$

em que a e b são constantes reais.

[1,0 val.] (a) Determine para que valores de a e b a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val.] (b) Para $a = b = -5$, determine a função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica $\operatorname{Re} f = u$ e $f(0) = -5\mathrm{i}$.

[1,0 val.] (c) Calcule o integral:

$$\oint_{|z|=2014} \frac{f(z)}{(z+1)^2}\, dz\ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

[1,5 val.] 2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{3}\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{3z}{\pi - 3z} + (z-1)e^{i(\pi - z)}.$$

Determine o desenvolvimento em série de Taylor, com centro em $z = 0$, e o respectivo domínio de validade.

3. Considere a função complexa de variável complexa, f, definida no seu domínio por:

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)^3} + \frac{e^z - 1}{(z^2+10)(z-2\pi\mathrm{i})} - z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Calcule o valor de $\oint_\gamma f(z)\, dz$, onde γ é a circunferência $|z+1| = 3$ percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.] 4. a) Use o teorema dos resíduos para calcular $I = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{i}dz}{1 - 3z + z^2}$.

[1,0 val.] b) Mostre que $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta} = I$.

[1,0 val.] 5. Considere um número real $\epsilon > 0$, um número complexo z_0 e uma função f, analítica e limitada no conjunto aberto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$. Mostre que z_0 é uma singularidade removível de f.

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte) — B

6. Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$y(t+1) + \left(2(t+1)^2 + 1\right)\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 1.$$

[1,0 val.] a) Mostre que a equação diferencial não é exacta, e determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$.

[1,0 val.] b) Determine explicitamente a solução do PVI.

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

[1,5 val.] (a) Determine e^{At}

[0,5 val.] (b) Sendo $\mathbf{b}(t) = (0, e^{3t})$, mostre que a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad , \quad \mathbf{y}(0) = (0,1),$$

é $\mathbf{y}(t) = \left(0\,,\,(1+t)e^{3t}\right)$.

[2,0 val.] 8. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - y' = 1 - \cos t, & \text{se } t \geq 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

9. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para} \quad x \in]0,\pi[\ ,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{para} \quad x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

onde $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

[1.0 val.] (a) Determine a série de cossenos de f e estude-a quanto à convergência pontual em $[0,\pi]$.

[1,5 val.] (b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira.

[0,5 val.] (c) Mostre que a solução que obteve em (b) verifica

$$\lim_{t\to\infty} \left|u(x,t) + 2\right| = 0$$

para qualquer $x \in [0,\pi]$.

[1,0 val.] 10. Seja $]\alpha,\omega[$ o intervalo máximo de existência de solução do seguinte PVI:

$$y' = y(2-y)e^{y \operatorname{sen} t}, \qquad y(0) = 1\,.$$

Determine $\alpha, \omega \in [-\infty, +\infty]$. Justifique a existência de $\lim\limits_{t\to\omega} y(t)$ e diga qual o seu valor.