Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2013/2014, 30/06/2014

Testes de Recuperação / Exame — versão A

LEIC-A, MEEC, LEMat, MEAer, MEBiol, MEQ, MEAmbi

1º Teste / Exame (1ª parte)

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = ax^2 - by^2,$$

em que a e b são constantes reais.

[1,0 val.] (a) Determine para que valores de a e b a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val.] (b) Para $a = b = -3$, determine a função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica $\operatorname{Re} f = u$ e $f(0) = 3\mathrm{i}$.

[1,0 val.] (c) Calcule o integral:

$$\oint_{|z|=2014} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz \ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

[1,5 val.] 2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{2z}{\pi + 2z} + (z+1)e^{i(\pi+z)}.$$

Determine o desenvolvimento em série de Taylor, com centro em $z = 0$, e o respectivo domínio de validade.

3. Considere a função complexa de variável complexa, f, definida no seu domínio por:

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{e^z - 1}{(z^2+5)(z+2\pi\mathrm{i})} + z\cos\frac{1}{z}$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Calcule o valor de $\oint_\gamma f(z)\, dz$, onde γ é a circunferência $|z-1| = 2$ percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.] 4. a) Use o teorema dos resíduos para calcular $I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 3iz - 1}$.

[1,0 val.] b) Mostre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\operatorname{sen}\theta} = I.$

[1,0 val.] 5. Considere um número real $\epsilon > 0$, um número complexo z_0 e uma função f, analítica e limitada no conjunto aberto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$. Mostre que z_0 é uma singularidade removível de f.

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte) — A

6. Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$1 + 2(y+1)^2 + x(y+1)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad y(1) = 0.$$

[1,0 val.] a) Mostre que a equação diferencial não é exacta, e determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$.

[1,0 val.] b) Determine explicitamente a solução do PVI.

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

[1,5 val.] (a) Determine e^{At}

[0,5 val.] (b) Sendo $\mathbf{b}(t) = (0, e^t)$, mostre que a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad , \quad \mathbf{y}(0) = (0, -1),$$

é $\mathbf{y}(t) = \big(\,0\,, (t-1)e^t\,\big)$.

[2,0 val.] 8. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y' = 1 + \operatorname{sen} t, & \text{se } t \geq 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

9. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para} \quad x \in]0, \pi[\ ,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para} \quad x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

onde $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

[1.0 val.] (a) Determine a série de cossenos de f e estude-a quanto à convergência pontual em $[0, \pi]$.

[1,5 val.] (b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira.

[0,5 val.] (c) Mostre que a solução que obteve em (b) verifica

$$\lim_{t \to \infty} \big|u(x,t) - 1\big| = 0$$

para qualquer $x \in [0, \pi]$.

[1,0 val.] 10. Seja $]\alpha, \omega[$ o intervalo máximo de existência de solução do seguinte PVI:

$$y' = y(1-y)e^{y \cos t}, \qquad y(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Determine $\alpha, \omega \in [-\infty, +\infty]$. Justifique a existência de $\lim_{t \to \omega} y(t)$ e diga qual o seu valor.