Análise Complexa e Equações Diferenciais
Semestre 2012/2013

1º Teste — Versão A

(Cursos: LEAN, LEMat, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiom, MEBiol, MEFT, MEMec, MEQ)

6 de Abril de 2013, 11h

Duração: 1h 30m

1. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = z + \overline{z}^3 z \ .$$

[1,0 val.] (a) Calcule todas as soluções da equação $f(z) = 0$.

[0,5 val.] (b) Mostre que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) = x + x^4 - y^4 \quad , \quad \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = v(x, y) = y - 2x^3y - 2xy^3$$

[1,0 val.] (c) Determine o conjunto de pontos onde f admite derivada complexa, e calcule a derivada nesses pontos. Indique, justificando, o domínio de analiticidade de f .

[1,0 val.] (d) Determine uma função g, holomorfa em $\mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re} g(x + iy) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4$.

[1,0 val.] (e) Calcule o valor do integral

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{g(z)}{(z-1)^2} dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

Resolução:

(a)

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z\left(1 + \overline{z}^3\right) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ \overline{z}^3 = -1$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = e^{-i(1+2k)\pi/3} \quad \text{com } k = 0, 1, 2.$$

(b) Note-se que $z\overline{z} = |z|^2$ e $f(z) = z + \overline{z}^2|z|^2$. Logo, com $z = x + iy$, temos

$$f(x + iy) = x + iy + (x - iy)^2(x^2 + y^2) = x + iy + (x^2 - i2xy - y^2)(x^2 + y^2)$$
$$= (x + x^4 - y^4) + i(y - 2x^3y - 2xy^3)$$

(c) Verifica-se que $f(x + iy)$ é uma função polinomial nas variáveis x e y, pelo que f é $\mathbb{R}$-diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{C}$. Assim, $f = u + iv$ é diferenciável apenas nos pontos em que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4x^3 = 1 - 2x^3 - 6xy^2 \\ -4y^3 = -(-6x^2y - 2y^3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x(x^2 + y^2) = 0 \\ 6y(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

Concluimos que f é diferenciável apenas no ponto $z=0$ com

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0) = 1.$$

O domínio de diferenciabilidade de f é o conjunto $\{0\}$ logo o domínio de analiticidade ou holomorfia de f é o conjunto vazio, i.e. f não é analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

(d) Uma função $g(x+iy) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + i\,V(x,y)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ se V satisfaz as equaões de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2 - x^4 - y^4) = 12\,x\,y^2 - 4\,x^3 \\ \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}(6x^2y^2 - x^4 - y^4) = -(12\,x^2\,y - 4\,y^3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} V(x,y) = 4\,x\,y^3 - 4\,x^3\,y + C(x) \\ 4y^3 - 12\,x^2\,y + C'(x) = -12\,x^2\,y + 4\,y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V(x,y) = 4\,x\,y^3 - 4\,x^3\,y + C \\ C(x) = C \end{cases}$$

aonde C é uma constante real. Assim a função g pedida é dada por

$$g(x+iy) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + i(4\,x\,y^3 - 4\,x^3\,y + C).$$

(e) Usando a fórmula integral de Cauchy, atendendo a que g é uma função inteira, temos

$$\int_{|z-1|=1} \frac{g(z)}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\,g'(1) = 2\pi i\left(\frac{\partial U}{\partial x}(1,0) - i\frac{\partial U}{\partial y}(1,0)\right) = -8\pi i.$$

aonde $U(x,y) = \operatorname{Re} g(x+iy) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4$.

[1,0 val.] 2. Use o teorema fundamental do cálculo para calcular

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{z^2}dz$$

em que γ é o caminho definido por $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}\pi t/2}$, para $t \in [0,1]$.

Resolução:

A função $z \mapsto \frac{e^{1/z}}{z^2}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e tem uma primitiva dada por

$$F(z) = -e^{1/z},$$

ou seja

$$F'(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2}.$$

Por outro lado, a curva percorrida pelo caminho regular γ une o ponto $1 = \gamma(0)$ ao ponto $i = \gamma(1)$ e está contida no domínio de holomorfia da função integranda. Assim, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{z^2}\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = -e^{1/i} - (-e^1) = e - e^{-i}.$$

3. Seja $f : \mathbb{C}\setminus\{-\frac{\mathrm{i}}{2}, \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{2z+\mathrm{i}} + e^{\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}} \quad .$$

[1,0 val.] (a) Escreva o desenvolvimento em série de Laurent de f convergente em $|z-\mathrm{i}| > \frac{3}{2}$.

[0,5 val.] (b) Determine todos os valores de $p \in \mathbb{Z}$ para os quais

$$\oint_{|z|=2013} (z-\mathrm{i})^p f(z)\, dz = 0$$

Resolução:

(a) Por um lado

$$e^{\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!(z-\mathrm{i})^n}$$

sendo o desenvolvimento válido em $|z-\mathrm{i}| > 0$. Por outro lado para $|z-\mathrm{i}| > \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2z+\mathrm{i}} = \frac{1}{2(z-\mathrm{i})+3\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \mathrm{i}^n (-1)^n}{2^{n+1}(z-\mathrm{i})^{n+1}}$$

concluindo-se que para $|z-\mathrm{i}| > \frac{3}{2}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!(z-\mathrm{i})^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \mathrm{i}^n}{2^{n+1}(z-\mathrm{i})^{n+1}}$$

(b) Pelo Teorema de Laurent os coeficientes da série obtida em (a), $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\mathrm{i})^n$ convergente em $A(\mathrm{i}, \frac{3}{2}, \infty) = \{z \ : \ |z-\mathrm{i}| > \frac{3}{2}\}$, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^{n+1}} dz$$

sendo γ qualquer curva de Jordan percorrida em sentido directo na região $A(\mathrm{i}, \frac{3}{2}, \infty)$, com i pertencente à região interior a γ - por exemplo a curva $\{z \ : \ |z| = 2013\}$. Assim

$$\oint_{|z|=2013} (z-\mathrm{i})^p f(z)\, dz = \oint_{|z|=2013} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^{-p}}\, dz = 2\pi\mathrm{i} a_{-p-1}$$

e o integral será zero para os inteiros p para os quais $a_{-p-1} = 0$. Desenvolvendo alguns termos da série obtida em (a)

$$f(z) = 1 + \Big(\mathrm{i} + \frac{1}{2}\Big)(z-\mathrm{i})^{-1} + \Big(\frac{\mathrm{i}^2}{2} - \frac{3\mathrm{i}}{2^2}\Big)(z-\mathrm{i})^{-2} + \Big(\frac{\mathrm{i}^3}{3!} + \frac{(3\mathrm{i})^2}{2^3}\Big)(z-\mathrm{i})^{-3} + \cdots$$

pelo que é fácil de concluir que $a_n = 0$ se e só se $n > 0$. Assim, conclui-se que $a_{-p-1} = 0$ se e só se $p < -1$.

4. Considere a função complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{z+2\pi}{1-e^{\mathrm{i}z}} + \frac{1}{z^2-4z+5} \ .$$

[1,0 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

Resolução:

(a) Considere-se $f(z) = \frac{z+2\pi}{1-e^{\mathrm{i}z}} + \frac{1}{z^2-4z+5} = f_1(z) + f_2(z)$. Por ser o quociente de funções inteiras, as singularidades de $f_1(z)$ são os zeros do denominador, isto é as soluções de

$$1 - e^{\mathrm{i}z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = -1$, verifica-se que

$$\lim_{z\to -2\pi} f_1(z) = \lim_{z\to -2\pi} \frac{z+2\pi}{1-e^{\mathrm{i}z}} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{1-e^{\mathrm{i}u}e^{2\pi\mathrm{i}}} = \mathrm{i}$$

cocluindo-se que -2π é uma singularidade removível de f_1 e como tal Res$(f_1, -2\pi\mathrm{i}) = 0$. Para $k \neq -1$ verifica-se que

$$\lim_{z\to 2k\pi} (z-2k\pi) f_1(z) = \lim_{z\to 2k\pi} (z-2k\pi)\frac{z+2\pi}{1-e^{\mathrm{i}z}} = (2k\pi+2\pi) \lim_{u\to 0} \frac{u}{1-e^{\mathrm{i}u}e^{2k\pi\mathrm{i}}} = 2(k+1)\pi\mathrm{i}$$

concluindo-se que as singularidades $2k\pi$, $k \neq -1$ são polos simples de f_1 e Res$(f_1, 2k\pi\mathrm{i}) = 2(k+1)\pi\mathrm{i}$.

Por outro lado, f_2 é uma função racional, pelo que as suas singularidades são os zeros do denominador, isto é

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 \pm \mathrm{i}$$

Verifica-se que

$$\lim_{z\to 2+\mathrm{i}} (z-(2+\mathrm{i})) f_2(z) = -\frac{\mathrm{i}}{2} \quad , \quad \lim_{z\to 2-\mathrm{i}} (z-(2-\mathrm{i})) f_2(z) = \frac{\mathrm{i}}{2}$$

pelo que $2 \pm \mathrm{i}$ são polos simples de f_2 e Res$(f_2, 2k \pm \mathrm{i}) = \mp\frac{\mathrm{i}}{2}$. Finalmente, atendendo a que f_1 é analítica nas singularidades de f_2 e f_2 é analítica nas singularidades de f_1, concluimos que

- $-2\pi\mathrm{i}$ é singularidade removível de f e Res$(f, -2\pi\mathrm{i}) = 0$;
- $2k\pi$, $k \neq -1$ são polos simples de f e Res$(f, 2k\pi\mathrm{i}) = 2(k+1)\pi\mathrm{i}$;
- $2 \pm \mathrm{i}$ são polos simples de f e Res$(f, 2k \pm \mathrm{i}) = \mp\frac{\mathrm{i}}{2}$.

(b) Por definição de integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

Considere-se a função complexa

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2-4z+5} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

e para R suficientemente grande, a curva C_R definida como a fronteira do semi-círculo $\{|z| \leq R \ , \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$, percorrida uma vez em sentido directo. Pelo Teorema dos resíduos e utilizando a alínea (a)

$$\oint_{C_R} f_2(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f_2, 2+\mathrm{i}) = \pi$$

Por outro lado

$$C_R = \{z = x \in]-R, R[\} \cup \{|z| = R \ , \ \operatorname{Im} z \geq 0\} = I_R \cup S_R$$

Emtão

$$\oint_{C_R} f_2(z)dz = \int_{I_R} f_2(z)dz + \int_{S_R} f_2(z)dz \quad \Leftrightarrow \quad \pi = \int_{-R}^{R} f_2(x)dx + \int_{S_R} f_2(z)dz$$

Fazendo $R \to \infty$

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f_2(z)dz$$

Atendendo a que

$$\Big|\frac{1}{z^2-4z+5}\Big| \leq \frac{1}{||z|^2-4|z|-5|} = \frac{1}{R^2-4R-5}$$

para $z \in S_R$ e R suficientemente grande. Então

$$\Big|\int_{S_R} \frac{1}{z^2-4z+5} dz\Big| \leq \int_{S_R} \frac{1}{R^2-4R-5}|dz| = \frac{\pi R}{R^2-4R-5}$$

o que nos permite concluir que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f_2(z)dz = 0$$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+5} = \pi$$

[1,0 val.] 5. Seja γ uma curva de Jordan e f holomorfa num conjunto aberto e simplesmente conexo contendo γ. Mostre que, para todo z pertencente à região interior a γ se verifica

$$|f(z)| \leq M,$$

onde $M := \max\{|f(z)|, \quad z \in \gamma\}$. Mostre ainda que se existe z_0 pertencente à região interior a γ tal que $|f(z_0)| = M$, então f é necessáriamente constante.

Resolução:

Seja z pertencente à região interior a γ. Por aplicação da fórmula integral de Cauchy, temos que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} M \left|\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw\right| = M. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que existe z_0 pertencente à região interior a γ tal que $|f(z_0)| = M$. Uma vez que f é holomorfa num aberto, para mostrarmos que f é constante, basta mostrar que $|f|$ é constante nalgum aberto contendo z_0. Suponhamos então por contradição que $|f(z_0)| = M$ e que existe uma circunferência γ_1 centrada em z_0, contida na região interior a γ e tal que existe $z_1 \in \gamma_1$ com $|f(z_1)| < M$. Como $|f|$ é contínua e $|f(z_1)| < M$, existe um arco da circunferência γ_1 (correspondente a um intervalo $(\theta_1, \theta_2) \in (0, 2\pi)$) que contém z_1 e no qual $|f(z)| < M$.

Então, pela propriedade do valor médio para funções holomorfas,

$$\begin{aligned} M = |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\theta_1} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta + \int_{\theta_2}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta\right| \\ &\leq \frac{M(2\pi + \theta_1 - \theta_2)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta \\ &< \frac{M(2\pi + \theta_1 - \theta_2)}{2\pi} + \frac{M(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = M, \end{aligned}$$

uma contradição.