Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2011/2012

1º Teste - Versão A

LEIC-A, LEGM, LEMat, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEQ, MEMec, LEAN, MEAer

31 de Março de 2012, 9h,
Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere as páginas do seu caderno de respostas e indique, na tabela seguinte, **todas** as páginas da resposta a cada questão.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1) a)		0,5	
1) b)		1,0	
1) c)		0,5	
2) a)		1,0	
2) b)		1,0	
3) a)		1,0	
3) b)		1,0	
3) c)		1,0	
4) a)		1,0	
4) b)		1,0	
5)		1,0	
Total		10	

Nome: ____

Nº: ______________________ **Sala:** _________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x$.

[0,5 val.] a) Mostre que u é harmónica.

[1,0 val.] b) Calcule uma função inteira f tal que $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ e $f(-1) = 0$.

[0,5 val.] c) Determine f'.

[1,0 val.] 2. a) Calcule, indicando o resultado em coordenadas cartesianas, o valor do integral

$$\oint_{|z-i|=1/2} \frac{2^{z+1}}{z-i}\, dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso e a potência 2^{z+1} corresponde ao valor principal do logaritmo.

[1,0 val.] b) Determine, justificando, o valor de $\int_\gamma 2^{z+1}\, dz$ onde γ é uma curva seccionalmente regular com ponto inicial $z_0 = 1$ e ponto final $z_1 = 2+i$.

[1,0 val.] 3. a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)},$$

válido para $0 < |z-2| < 1$.

[1,0 val.] b) Considere a função definida por

$$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{\operatorname{sen}(z^2)}{z} + \frac{1}{(z^2 - 9/4)^2}.$$

Classifique as singularidades de g e calcule os respectivos resíduos.

[1,0 val.] c) Calcule

$$\oint_{|z+3|=3{,}5} (f(z) + g(z))\, dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido anti-horário.

[1,0 val.] 4. a) Aplicando o teorema dos resíduos calcule

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,0 val.] b) Calcule o integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta$$

(Sugestão: Use o resultado da alínea anterior)

[1,0 val.] 5. Mostre que uma função diferenciável em 0 que satisfaça $|f^{(n+1)}(0)| \geq n|f^{(n)}(0)|$, para todo n suficientemente grande, não pode ser holomorfa em nenhum disco $D_R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R\}$ com $R > 1$.