INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2011/2012

2º Teste - Versão B

LEIC-A, LEGM, LEMAT, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEQ, MEMEC, LEAN, MEAER

26 de Maio de 2012, 9h,

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere as páginas do seu caderno de respostas e indique, na tabela seguinte, **todas** as páginas da resposta a cada questão.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1) a)		1,5	
1) b)		1,0	
2) a)		1,0	
2) b)		1,0	
2) c)		1,0	
3)		1,5	
4) a)		1,0	
4) b)		1,0	
5)		1,0	
Total		10	

Nome: ______________________________

Nº: ____________________ **Sala:** __________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

[1,0 val.] 1. (a) Determine a solução geral da equação

$$y\frac{dy}{dt} = t + t^3 + y^2(t + t^3).$$

[1,5 val.] (b) Mostre que

$$\frac{e^{2t}}{\cos y} - 2\,\mathrm{tg}\,(y) + \frac{dy}{dt} = 0$$

admite o factor integrante $\mu(t, y) = e^{-2t}\cos y$ e obtenha a solução da equação com condição inicial $y(0) = 0$.

[1,0 val.] 2. (a) Determine a solução geral do sistema

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) \qquad \text{com} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] (b) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

[1,0 val.] (c) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \qquad \text{com} \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

[1,5 val.] 3. Calcule a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 2y' = 2 - \operatorname{sen} t \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

[1,0 val.] 4. (a) Determine a solução do problema, para $x \in [0, 1]$, $t > 0$ de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \qquad t > 0\,, \\ u(x, 0) = 3 + 4\cos(3\pi x), \qquad 0 < x < 1. \end{cases}$$

(b) Calcule a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = H(x) - \frac{1}{2}$, onde $H(x)$ é a função de Heaviside.Qual é a soma daquela série para cada $x \in [-\pi, \pi]$?

[1,0 val.] 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, contínua e tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C(1 + t^2)|y_1 - y_2|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

onde C designa uma constante positiva. Justifique que para qualquer $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, o problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

admite uma solução única nalguma vizinhança de t_0. Supondo ainda que $f(t, 0) = 0$, mostre que o intervalo máximo de existência da solução não é limitado superiormente.