



Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2011/2012

Testes de Recuperação/Exame

Versão B

23 de Junho de 2012

LEIC-A, LEGM, LEMAT, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEQ, MEMEC, LEAN, MEAER

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na coluna correspondente as páginas onde as questões estão respondidas.
A classificação do seu Teste/Exame será feita de acordo com a coluna que preencher.
- **Duração do teste: 1 hora e 30 minutos.**
Duração do exame: 3 horas.

Pergunta	pág. 1ºTESTE	pág. 2º TESTE	pág. EXAME	cotação	classificação
1				3,5	
2				1,5	
3				2,5	
4				1,5	
5				1,0	
6				3,0	
7				2,5	
8				1,5	
9				2,5	
10				1,0	
Total				10+10	

Nome: _____

Nº: _____

Sala: _____

Curso: _____

Rúbrica (DOCENTE): _____

1º Teste / Exame (1ª parte)

1. Seja $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x, y) = 2xy + h(y),$$

onde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável em \mathbb{R} .

[0,5 val.]

(a) Mostre que v é harmônica se e só se h é linear, isto é se $h(y) = ay + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

[1,0 val.]

(b) Considerando $h(y) = 3y$ calcule uma função inteira f tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $f(-3) = 0$.

[1,0 val.]

(c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z+i)^2} dz$$

onde C é a circunferência de raio 2 centrada na origem percorrida no sentido negativo.

[1,0 val.]

(d) Considere o caminho $\gamma(t) = 3 + 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Calcule $\int_{\gamma} \log(z) dz$.

[1,5 val.]

2. Determine a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$$

válida na região $|z-1| > 1$.

3. Considere a função complexa de variável complexa g definida no seu domínio por

$$g(z) = \cos\left(\frac{2}{z-i}\right) + \frac{1-e^{3z}}{z^2} - \frac{2i}{1+z^2}$$

[1,5 val.]

(a) Determine e classifique todas as singularidades de g , calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.]

(b) Calcule o integral $\oint_C g(z) dz$ onde C é o triângulo de vértices em -1 , $1+i$ e $1-i$, percorrido uma vez no sentido inverso.

[1,5 val.]

4. Use o teorema dos resíduos para calcular o integral real

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

[1,0 val.]

5. Considere uma função inteira F definida por

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Mostre que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta}) e^{-i\theta n} d\theta, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

2º Teste / Exame (2ª parte)

- [1,5 val.] 6. (a) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' = -\frac{y}{t} + 2 \operatorname{sen}(t^2).$$

- [1,5 val.] (b) Considere o problema de valor inicial

$$2t - x + (2x - t) \frac{dx}{dt} = 0, \quad x(0) = -1.$$

Determine a solução do problema na forma explícita e indique o seu intervalo máximo de existência.

7. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- [1,0 val.] (a) Calcule a solução geral de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

- [1,5 val.] (b) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- [1,5 val.] 8. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 9y = e^t + \operatorname{sen}(3t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

- [1,0 val.] 9. (a) Calcule a série de Fourier de cossenos da função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Qual é a soma da série para cada $x \in [0, \pi]$? Sugestão: para calcular os coeficientes da série pode ser útil considerar um integral de uma função complexa.

- [1,0 val.] (b) Determine a solução do problema, para $x \in [0, \pi]$, $t > 0$:

$$u_t = 4u_{xx} + u, \quad \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

- [1,0 val.] 10. Sendo $y_0 \in \mathbb{R}^+$, considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{1 + \operatorname{sen}^2(t + y)} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Mostre que o problema tem solução única, $y(t)$, tal que $y(t) > 0$ em todo o seu intervalo máximo de existência e calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.