INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Departamento de Matemática

6 de Julho de 2007

Cálculo Diferencial e Integral I

Resolução do 2º Exame

MEEC, LEEC

I

(2,5) 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - \pi}{2x^2 + 3x} \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\pi\,, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]0, \pi\right]$.

$$\begin{aligned}
\frac{|x| - \pi}{2x^2 + 3x} \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (|x| \leq \pi \ \wedge \ 2x^2 + 3x > 0) \\
&\qquad\qquad \vee \\
&\qquad (|x| \geq \pi \ \wedge \ 2x^2 + 3x < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (-\pi \leq x \leq \pi \wedge (x > 0 \vee x < -\frac{3}{2})) \\
&\qquad\qquad \vee \\
&\qquad (x \leq -\pi \vee x \geq \pi) \wedge (-\frac{3}{2} < x < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (0 < x \leq \pi) \\
&\qquad\qquad \vee \\
&\qquad (-\pi \leq x < -\frac{3}{2})
\end{aligned}$$

pelo que $A = \left[-\pi\,, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]0, \pi\right]$.

b) Determine ou mostre que não existem, em $\mathbb{R}$,

$$\min A \cap \mathbb{Q}, \quad \inf B, \quad \max(A \cap B), \quad \sup(A \cap \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})).$$

$\min A \cap \mathbb{Q}$ não existe. De facto, sendo $V_\epsilon(-\pi) \cap A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, para qualquer $\epsilon > 0$, e $-\pi$ um minorante de A (ou seja $-\pi$ é o ínfimo de $A \cap \mathbb{Q}$) a irracionalidade de $-\pi$ mostra que não existe $\min A \cap \mathbb{Q}$.

$\inf B = 0$ porque a sucessão dada por $x_n = \frac{\pi}{n}$ é estritamente decrescente e converge para 0.

$\max A \cap B = \pi$ porque, $A \cap B = B$ e $\frac{\pi}{n} = \pi$, para $n = 1$.

$\sup(A \cap \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \pi$ porque $\sup A = \pi$ e $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(2) 2. Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_1 = 1 \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+2u_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

(a) Prove, por indução matemática, que

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{3^n - 2^n}, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_1.$$

(b) Mostre que (u_n) é uma sucessão convergente, calculando o limite.

(c) Determine, a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Justifique a sua resposta.

(a) Para $n = 1$ a condição acima fica $u_1 = \frac{2^{1-1}}{3^1-2^1} = \frac{1}{3-2} = 1$ que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: Para um dado $n \in \mathbb{N}_1$ temos $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{3^n - 2^n}$.

Tese: $u_{n+1} = \dfrac{2^n}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$.

Da definição por recorrência, temos $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+2u_n}$ e da hipótese de indução, resulta

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2u_n}{3+2u_n} = \frac{2\frac{2^{n-1}}{3^n-2^n}}{3+2\frac{2^{n-1}}{3^n-2^n}} = \frac{2^n}{3^n-2^n} \cdot \frac{3^n-2^n}{3^{n+1}-32^n+2^n} \\ &= \frac{2^n}{3^{n+1}-(3-1)2^n} = \frac{2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}. \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(b) Como se pode verificar de

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{3^n - 2^n} = \frac{1}{2}\,\frac{(\frac{2}{3})^n}{1-(\frac{2}{3})^n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}_1,$$

a sucessão (u_n) é convergente e $\lim u_n = 0$.

(c) Atendendo a que se trata de uma série de termos positivos e que o limite

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{2u_n}{3+2u_n}}{u_n} = \lim \frac{2}{3+2u_n} = \frac{2}{3}$$

existe e é menor que 1, conclui-se que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.

II

(3) 1. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right).$$

(a) Justifique que f é contínua no seu domínio.

A função f é contínua em qualquer ponto $x \neq 0$ porque a função f é a composição da função $x \mapsto \operatorname{arctg} x$, contínua em $\mathbb{R}$, com a função $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Mostre que existem os limites laterais de f em 0 e determine, justificando, se f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$.

Atendendo a que $\lim\limits_{x \to 0^\pm} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \pm\infty$ e $\lim\limits_{y \to \pm\infty} \operatorname{arctg}(y) = \pm\dfrac{\pi}{2}$, os limites laterais de f no ponto 0 são

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

e

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Assim, sendo $f(0^-) \neq f(0^+)$ não existe o limite de f em 0 e esta não é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$.

(c) Calcule os limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e indique o contradomínio de f.

Sendo $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ é estritamente decrescente em cada um dos intervalos $\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}^+$ temos que f é tambem estritamente decrescente em cada um dos intervalos $\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}^+$. Decorre da continuidade de f, do valor dos limites laterais em 0 e dos limites

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = \operatorname{arctg}(0) = 0$$

que o contradomínio de f é o conjunto

$$f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

(2) 2. Determine a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \qquad F(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Uma primitiva de F' é dada por

$$\begin{aligned} P\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - P\left(x\,\frac{\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,P\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,\mathrm{arctg}\,x. \end{aligned}$$

Sendo que qualquer outra primitiva de F' é obtida da anterior por soma de uma constante real, então

$$F(x) = x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

A condição $F(1) = \frac{\pi}{2}$ significa que

$$F(1) = \frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \log(2) + \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad C = -\log(2).$$

Resulta que

$$F(x) = x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,\mathrm{arctg}\,x - \log(2)$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

(3,5) 3. Calcule o valor dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\mathrm{tg}\,x)}{\cos^2 x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2u-1}{(u^2+1)(u+2)}\,du$.

a) A função integranda é imediatamente primitivável no intervalo de integração considerado. Aplicando a regra de Barrow resulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\mathrm{tg}\,x)}{\cos^2 x}\,dx = \left[\mathrm{sen}(\mathrm{tg}\,x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{sen}(1).$$

b) O método de integração por substituição é aplicável recorrendo à substituição $t = \varphi(y) = y^2$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1+\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1+y}{(1+y^2)y}\cdot 2y\,dy = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1+y}{1+y^2}\,dy \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{1+y^2}\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2y}{1+y^2}\,dy \\ &= \left[2\,\mathrm{arctg}\,y\right]_1^{\sqrt{2}} + \left[\log(1+y^2)\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{2} + \log\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

c) A função integranda é racional com a seguinte decomposição em fracções simples

$$\frac{2u-1}{(u^2+1)(u+2)} = \frac{u}{u^2+1} - \frac{1}{u+2}.$$

Cada uma das fracções simples é imediatamente primitivável no intervalo de integração considerado. Resulta da aplicação da regra de Barrow o seguinte

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2u-1}{(u^2+1)(u+2)}\,du &= \int_0^1 \frac{u}{u^2+1} - \int_0^1 \frac{1}{u+2} \\ &= \left[\frac{1}{2}\log(1+u^2)\right]_0^1 - [\log(u+2)]_0^1 \\ &= \log\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).\end{aligned}$$

III

(5) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\frac{x}{x^2-2x+2}}.$$

1. Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule f'.

Sendo $x \mapsto \frac{x}{x^2-2x+2}$ uma função racional definida em $\mathbb{R}$, é também diferenciável em $\mathbb{R}$. Então f é diferenciável em $\mathbb{R}$ porque é a composta da função exponencial, diferenciável em $\mathbb{R}$, com uma função igualmente diferenciável em $\mathbb{R}$.
A derivada de f, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-2x+2}\right)' e^{\frac{x}{x^2-2x+2}} = \frac{2-x^2}{(x^2-2x+2)^2}\, e^{\frac{x}{x^2-2x+2}}.$$

2. Determine os intervalos em que f é monótona.

Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}$, os respectivos intervalos de monotonia são determinados pelo sinal de f'. Assim

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (2-x^2) < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{2} \text{ ou } x < -\sqrt{2}$$

e

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x^2) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Podemos então concluir que

$f(x)$ é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, -\sqrt{2}]$,

$f(x)$ é estritamente decrescente no intervalo $[\sqrt{2}, +\infty[$,

$f(x)$ é estritamente crescente no intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

3. Verifique que f tem extremos locais nos pontos $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ e diga se estes são pontos de máximo ou mínimo.

f tem um mínimo local no ponto $x = -\sqrt{2}$ porque $f'(-\sqrt{2}) = 0$ com

$f(x)$ est. decrescente em $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e est. crescente em $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

f tem um máximo local no ponto $x = \sqrt{2}$ porque $f'(\sqrt{2}) = 0$ com

$f(x)$ est. crescente em $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e est. decrescente em $[\sqrt{2}, +\infty[$.

4. Mostre que a função g definida, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, por

$$g(x) = \int_0^{2x} f(t)\, dt$$

é duas vezes diferenciável e calcule $g'(x)$ e $g''(x)$.

Sendo a função integranda f diferenciável em $\mathbb{R}$, é também contínua em $\mathbb{R}$ e consequentemente o integral indefinido

$$\varphi(u) = \int_0^u f(t)\, dt$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada $\varphi'(u) = f(u)$. Então g é diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada

$$g'(x) = (2x)'\varphi'(2x) = 2\, f(2x).$$

e segunda derivada

$$g''(x) = 2(2x)' f'(2x) = \frac{2(1-2x^2)}{(2x^2-2x+1)^2}\, e^{\frac{x}{2x^2-2x+1}}.$$

5. Determine os pontos de inflexão do gráfico de g.

Sendo g duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, o sentido da concavidade do seu gráfico é determinados pelo sinal de g''. Assim

$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow (1-2x^2) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow (1-2x^2) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Temos assim que $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ são os pontos de inflexão do gráfico de g.

IV

(2) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = 1$ e que, para qualquer $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2\,[f(x)]^2}.$$

1. Mostre que, para qualquer $x \geq 1$,

$$f(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

(**Sugestão**: Comece por mostrar que f é crescente.)

Dado que $f'(x) > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, a função f é estritamente crescente e

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2\,[f(x)]^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Resulta da monotonia do integral e da aplicação da regra de Barrow

$$\begin{aligned} f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2} \quad &\Rightarrow \quad \int_1^x f'(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &\Rightarrow \quad f(x) - f(1) \leq \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &\Rightarrow \quad f(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}, \end{aligned}$$

para qualquer $x \geq 1$.

2. Prove que existe o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$

No intervalo $[1, +\infty[$ a função f é limitada, com se verifica da desigualdade

$$f(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = 1 + [\operatorname{arctg} t]_1^x = 1 + \operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4} \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$

e sendo f uma função estritamente crescente fica garantida a existência de limite em $+\infty$. É evidente que, da desigualdade anterior, resulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$