INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Departamento de Matemática

6 de Julho de 2007

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame

MEEC, LEEC

I

(2,5) 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - \pi}{2x^2 + 3x} \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\pi\,, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]0, \pi\right]$.

b) Determine ou mostre que não existem, em $\mathbb{R}$,

$$\min A \cap \mathbb{Q}, \quad \inf B, \quad \max(A \cap B), \quad \sup(A \cap \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})).$$

(2) 2. Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_1 = 1 \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 + 2u_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

(a) Prove, por indução matemática, que

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{3^n - 2^n}, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_1.$$

(b) Mostre que (u_n) é uma sucessão convergente, calculando o limite.

(c) Determine, a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Justifique a sua resposta.

II

(3) 1. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right).$$

(a) Justifique que f é contínua no seu domínio.

(b) Mostre que existem os limites laterais de f em 0 e determine, justificando, se f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$.

(c) Calcule os limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e indique o contradomínio de f.

(2) 2. Determine a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \qquad F(1) = \frac{\pi}{2}.$$

(3,5) 3. Calcule o valor dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\, dx\,,$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{t}}\, dt\,,$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2u-1}{(u^2+1)(u+2)}\, du\,.$

III

(5) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\frac{x}{x^2-2x+2}}$$

1. Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule f'.
2. Determine os intervalos em que f é monótona.
3. Verifique que f tem extremos locais nos pontos $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ e diga se estes são pontos de máximo ou mínimo.
4. Mostre que a função g definida, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, por

$$g(x) = \int_0^{2x} f(t)\, dt$$

é duas vezes diferenciável e calcule $g'(x)$ e $g''(x)$.

5. Determine os pontos de inflexão do gráfico de g.

IV

(2) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = 1$ e que, para qualquer $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2\,[f(x)]^2}.$$

1. Mostre que, para qualquer $x \geq 1$,

$$f(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

(**Sugestão**: Comece por mostrar que f é crescente.)

2. Prove que existe o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$