INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Departamento de Matemática

22 de Junho de 2007

Cálculo Diferencial e Integral I

Resolução do 1º Exame e 2º Teste

MEEC, LEEC

I

(2) 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x-2}{x|x-3|} \geq 0 \right\}, \quad B = \left\{ e^{n^2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

a) Mostre que $A = [-2, 0[\cup [1, 3[\cup]3, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x-2}{x|x-3|} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2+x-2 \geq 0 \ \wedge \ x|x-3| > 0) \\
&\qquad\qquad \vee \\
&\qquad (x^2+x-2 \leq 0 \ \wedge \ x|x-3| < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 1 \vee x \leq -2) \wedge (x > 0) \wedge (x \neq 3) \\
&\qquad\qquad \vee \\
&\qquad (-2 \leq x \leq 1) \wedge (x < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 1 \vee x \neq 3) \\
&\qquad\qquad \vee \\
&\qquad (-2 \leq x < 0)
\end{aligned}$$

pelo que $A = [-2, 0[\cup [1, 3[\cup]3, +\infty[$.

b) Determine ou mostre que não existem, em $\mathbb{R}$,

$$\min A, \quad \sup B, \quad \max((A \cap B) \cap \mathbb{Q}), \quad \inf(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})).$$

$\min A = -2$, porque -2 é um minorante de A e $-2 \in A$.

$\sup B$ não existe porque a sucessão dada por $x_n = e^{n^2}$ não é majorada.

$\max A \cap B \cap \mathbb{Q} = 1$ porque, sendo irracionais os números da forma e^k com $k \geq 1$, o conjunto é $A \cap B \cap \mathbb{Q} = \{1\}$.

$\inf(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = e$ porque a sucessão $x_n = e^{n^2}$ é estritamente crescente com $x_0 = 1$ e $x_1 = e$.

(1,5) 2. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

a) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n+(3n)!}}$, b) $\lim \dfrac{\log(1+n)}{\operatorname{arctg}(2+n\,(-1)^n)}$, c) $\lim \left(1+\dfrac{\cos(n)}{9^n}\right)^{(-1)^n}$.

a) Atendendo a que $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (se este limite existir), temos

$$\begin{aligned}
\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n+(3n)!}} &= \lim \frac{\frac{(n+1)!}{n+1+(3n+3)!}}{\frac{n!}{n+(3n)!}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{n+(3n)!}{n+1+(3n+3)!} = \\
&= \lim (n+1)\,\frac{n+(3n)!}{n+1+3(n+1)(3n+2)!} \\
&= \lim \frac{n+(3n)!}{1+3(3n+2)(3n+1)(3n)!} = \\
&= \lim \frac{\frac{n}{(3n)!}+1}{\frac{1}{(3n)!}+3(3n+2)(3n+1)} = \frac{0+1}{0+\infty} = 0.
\end{aligned}$$

b) A sucessão $u_n = \frac{\log(1+n)}{\operatorname{arctg}(2+n\,(-1)^n)}$ tem subsucessões u_{2n} e u_{2n+1}, ambas convergentes em $\overline{\mathbb{R}}$, com $\lim u_{2n} = +\infty$ e $\lim u_{2n+1} = -\infty$. Concluímos que (u_n) não é convergente, não existindo assim, em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite da alínea b).

c) $\lim \left(1+\dfrac{\cos(n)}{9^n}\right)^{(-1)^n} = 1$, uma vez que $\frac{\cos(n)}{9^n} \to 0$ e consequentemente $1+\frac{\cos(n)}{9^n} \to 1$.

(1) 3. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = (n+1)!\,(n+1)^n\, u_n \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Mostre usando indução matemática que $u_n = (n!)^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

Para $n = 1$, temos $u_1 = 1 = (1!)^1$. Supondo por hipótese de indução que $u_n = (n!)^n$, para dado $n \in \mathbb{N}_1$, temos

$$u_{n+1} = (n+1)!\,(n+1)^n\, u_n = (n+1)!(n+1)^n\,(n!)^n = (n+1)!\,((n+1)!)^n = ((n+1)!)^{n+1}$$

como queriamos mostrar.

II

(5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+e^x}\,, & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(1/x^2)\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Justifique que f é contínua em $\mathbb{R}$.

A função f é contínua no ponto 0 porque

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{1+e^x} = \frac{0}{1+1} = 0 = f(0)$$

e

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(1/x^2) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 = f(0)$$

Para $x > 0$, a função f é contínua porque é o quociente das funções seno e $x \mapsto 1 + e^x$ ambas contínuas, em $\mathbb{R}^+$.

Para $x < 0$, a função $x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x^2)$ é a composição da função $x \mapsto \operatorname{arctg} x$, contínua em $\mathbb{R}$, com a função racional $x \mapsto 1/x^2$, contínua em $\mathbb{R}^-$. Assim f é contínua porque é o produto das funções seno e $x \mapsto \operatorname{arctg}(1/x^2)$ ambas contínuas, em $\mathbb{R}^-$.

2. Mostre que os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existem e são finitos determinando os seus valores.

Atendendo a que a função seno é limitada e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(1/x^2) = \operatorname{arctg}(0) = 0$ temos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+e^x} = 0,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(1/x^2) = 0.$$

3. Mostre que f uma função limitada.

Decorre da continuidade de f e da existência e finitude dos seus limites em $\pm\infty$.

4. Calcule as derivadas laterais $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$. Diga se a função f é diferenciável em 0 e justifique.

Para as derivadas laterais de f no ponto 0 temos

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen} h}{1+e^h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+e^h} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_e(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} h \cdot \operatorname{arctg}(1/h^2) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Então f não é diferenciável no ponto 0 porque $f'_d(0) \neq f'_e(0)$.

2º Teste — Duração: 1h30

III

(2) 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções

a) $\dfrac{e^{1+\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2 x}$ c) $\dfrac{1}{(4+x)\sqrt{x}}$.

a) $P\left(\dfrac{e^{1+\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\right) = e^{1+\operatorname{arcsen} x}$.

b) $$\begin{aligned} P\left(\operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2 x}\right) &= P\left(2\operatorname{sen} x\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\right) \\ &= -\frac{2}{3}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

c) Fazendo $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2$, temos

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{(4+x)\sqrt{x}}\right) &= P\left(\frac{2t}{(4+t^2)t}\right) = P\left(\frac{2}{4+t^2}\right) = \\ &= P\left(\frac{2}{4(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right). \end{aligned}$$

(1,5) 2. Calcule a área da região plana A definida por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \log x\}.$$

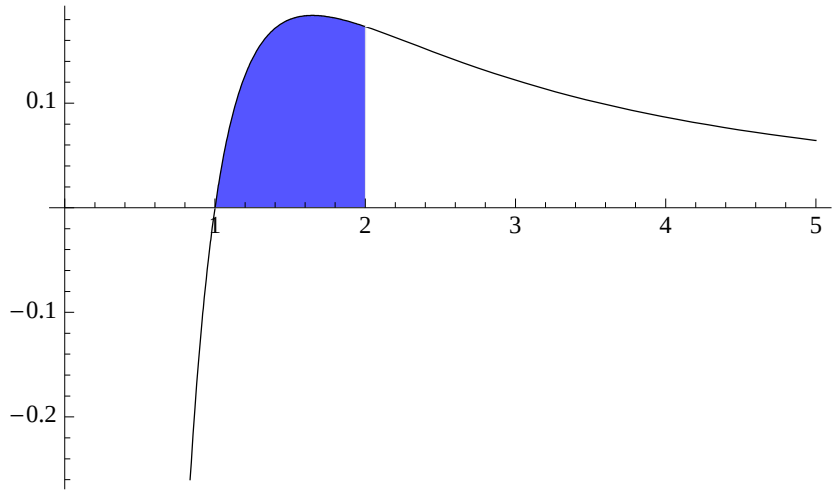
Os pontos de intersecção das linhas que limitam a região A são $(2, 0)$, $(2, \frac{\log 2}{4})$ e o ponto com abcissa definida por:

$$\frac{1}{x^2} \log x = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

ou seja, o ponto $(1, 0)$. Como $\frac{1}{x^2} \log x > 0$ para $1 < x < 2$, a área é dada por:

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \log x \, dx = \left[-\frac{1}{x} \log x \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$
$$= -\frac{1}{2} \log 2 + 0 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2}.$$

Pode ser útil a representação gráfica da região A:



IV

(2) 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1 - 2x)e^{1-x^2}$$

(a) Justifique que f é diferenciável e calcule $f'(x)$.

A função $x \mapsto e^{1-x^2}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ porque é a composição da função exponencial com uma função polinomial, ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Então f é diferenciável em $\mathbb{R}$ porque é o produto de um funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$.
A derivada de f, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$f'(x) = -2e^{1-x^2} + (1 - 2x)(-2x)e^{1-x^2} = 2(2x^2 - x - 1)e^{1-x^2}$$

(b) Determine os intervalos em que f é monótona.

Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}$, os respectivos intervalos de monotonia são determinados pelo sinal de $f'(x)$. Assim

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x^2 - x - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ou } x < -\frac{1}{2}$$

e

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (2x^2 - x - 1) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1.$$

Podemos então concluir que

$$f(x) \text{ é estritamente crescente } \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1/2] \text{ ou } [1, +\infty[$$

$$f(x) \text{ é estritamente decrescente } \Leftrightarrow x \in [-1/2, 1]$$

(c) Verifique que f tem extremos locais nos pontos $-\frac{1}{2}$ e 1 e diga se estes são pontos de máximo ou mínimo.

f tem um máximo local no ponto $x = -\frac{1}{2}$ porque $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ com

$$f(x) \text{ est. crescente em }]-\infty, -1/2] \text{ e est. decrescente em } [-1/2, 1].$$

f tem um mínimo local no ponto $x = 1$ porque $f'(1) = 0$ com

$$f(x) \text{ est. decrescente em } [-1/2, 1] \text{ e est. crescente em } [-1/2, +\infty[.$$

(2) 2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \int_{1/4}^{x^2} f(\operatorname{sen} t)dt$$

em que a função f é dada por $f(y) = 1 - 2y$ para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

(a) Justifique que g é diferenciável e calcule $g'(x)$.

Sendo a função integranda $t \mapsto f(\operatorname{sen} t) = 1 - 2\operatorname{sen} t$, contínua em $\mathbb{R}$, o integral indefinido

$$\phi(u) = \int_{1/4}^{u} f(\operatorname{sen} t)dt$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada $\phi'(u) = f(\operatorname{sen} u)$. Então g é diferenciável em $\mathbb{R}$ porque é a composição de ϕ com uma função polinomial e

$$g'(x) = (x^2)'\phi'(x^2) = 2xf(\operatorname{sen} x^2) = 2x(1 - 2\operatorname{sen} x^2).$$

(b) Determine, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite $\lim_{x \to 1/2} f(x)/g(x)$.

Sendo f e g diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e $g(1/2) = f(1/2) = 0$ podemos recorrer à regra de Cauchy para obter

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1/2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-2}{1 - 2\operatorname{sen}(1/4)}.$$

V

(3) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com segunda derivada contínua.

1. Mostre que, para qualquer natural $n \geq 1$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = 2f(0) + \frac{f''(\alpha_n) + f''(\beta_n)}{2n^2} \qquad \text{onde } \alpha_n, \beta_n \in [-1, 1].$$

(**Sugestão**: Use a fórmula de Maclaurin de f).

À função f, duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$, corresponde a fórmula de Maclaurin de 1ª ordem:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(\xi)}{2}\,x^2$$

em que ξ está entre 0 e x para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = \pm\frac{1}{n}$, para um natural $n \geq 1$, obtemos

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(\alpha_n)}{2n^2} \quad \text{e} \quad f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0) - \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(\beta_n)}{2n^2}$$

em que $\alpha_n, \beta_n \in [-1, 1]$. Então a soma é

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = 2f(0) + \frac{f''(\alpha_n) + f''(\beta_n)}{2n^2}.$$

2. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0)\right)$$

é absolutamente convergente.

A continuidade da segunda derivada f'', garante que esta é uma função limitada no intervalo $[-1, 1]$, ou seja

$$|f''(x)| \leq M, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Assim, da expressão obtida em 1. obtemos

$$\sqrt{n}\left|f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0)\right| = \sqrt{n}\left|\frac{f''(\alpha_n) + f''(\beta_n)}{2n^2}\right| \leq \sqrt{n}\frac{M}{n^2} = \frac{M}{n^{3/2}}.$$

para qualquer natural $n \geq 1$. Atendendo a que $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série de Dirichlet convergente resulta do critério geral comparação que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0)\right)$$

é absolutamente convergente.