INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Departamento de Matemática

22 de Junho de 2007

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Exame e 2º Teste (III, IV, V)

MEEC, LEEC

I

(2) 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + x - 2}{x|x-3|} \geq 0 \right\}, \quad B = \left\{ e^{n^2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

a) Mostre que $A = [-2, 0[\cup [1, 3[\cup]3, +\infty[$.

b) Determine ou mostre que não existem, em $\mathbb{R}$,

$$\min A, \quad \sup B, \quad \max((A \cap B) \cap \mathbb{Q}), \quad \inf(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})).$$

(2) 2. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

a) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n + (3n)!}}$, b) $\lim \dfrac{\log(1+n)}{\operatorname{arctg}(2 + n\,(-1)^n)}$, c) $\lim \left(1 + \dfrac{\cos(n)}{9^n}\right)^{(-1)^n}$.

(1) 3. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = (n+1)!\,(n+1)^n\, u_n \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Mostre usando indução matemática que $u_n = (n!)^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

II

(5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + e^x}, & \text{se } x > 0 \\ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(1/x^2), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Justifique que f é contínua em $\mathbb{R}$.
2. Mostre que os limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ existem e são finitos determinando os seus valores.
3. Mostre que f é uma função limitada.
4. Calcule as derivadas laterais $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$. Diga se a função f é diferenciável em 0 e justifique.

Início do 2º Teste **Duração: 1h30**

III

(1,5) 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções (5)

$$\text{a) } \frac{e^{1+\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{b) } \operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2 x} \qquad \text{c) } \frac{1}{(4+x)\sqrt{x}}$$

(1,5) 2. Calcule a área da região plana A definida por (3)

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2 \text{ e } 0 < y < \frac{1}{x^2}\log x\}.$$

IV

(2) 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por (5)

$$f(x) = (1-2x)e^{1-x^2}$$

(a) Justifique que f é diferenciável e calcule $f'(x)$.

(b) Determine os intervalos em que f é monótona.

(c) Verifique que f tem extremos locais nos pontos $-\frac{1}{2}$ e 1 e diga se estes são pontos de máximo ou mínimo.

(2) 2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por (4)

$$g(x) = \int_{1/4}^{x^2} f(\operatorname{sen} t)dt$$

em que a função f é dada por $f(y) = 1 - 2y$ para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

(a) Justifique que g é diferenciável e calcule $g'(x)$.

(b) Determine, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x)/g(x)$.

V

(3) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com segunda derivada contínua. (3)

1. Mostre que, para qualquer natural $n \geq 1$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = 2f(0) + \frac{f''(\alpha_n) + f''(\beta_n)}{2n^2} \qquad \text{onde } \alpha_n, \beta_n \in [-1,1].$$

(**Sugestão**: Use a fórmula de Maclaurin de f).

2. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) - 2f(0)\right)$$

é absolutamente convergente.