INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Departamento de Matemática

9 de Dezembro de 2006

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

LEIC-A, LEMat, LEAmb, LEAN, MEAer,
MEBiol, MEC, MEEC, MEMec, MEQ - 2ª fase

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$: (5 val)

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x+2|-1}{x-2} \leq 0 \right\}, \quad B = \left[-3, \sqrt{2} \right]$$

a) Mostre que $A =]-\infty, -3] \cup [-1, 2[$.

$$\begin{aligned} \frac{|x+2|-1}{x-2} \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (|x+2| \leq 1 \wedge x > 2) \vee (|x+2| \geq 1 \wedge x < 2) \\ &\Leftrightarrow \quad (x+2 \leq -1 \wedge x < 2) \vee (x+2 \geq 1 \wedge x < 2) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \leq -3 \wedge x < 2) \vee (x \geq -1 \wedge x < 2) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, -3] \cup [-1, 2[\end{aligned}$$

pelo que $A =]-\infty, -3] \cup [-1, 2[$

b) Determine, caso existam em $\mathbb{R}$, ou mostre que não existem

$$\inf A \cap B, \ \max A \cap B, \ \sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}), \ \max A \cap B \cap \mathbb{Q}, \ \max A \cap \mathbb{R}^+.$$

Sendo $A \cap B = \{-3\} \cup \left[-1, \sqrt{2}\right]$ e $A \cap \mathbb{R}^+ =]0, 2[$ temos

$$\inf A \cap B = -3, \ \max A \cap B = \sqrt{2}, \ \sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \sqrt{2}$$

e não existem, em $\mathbb{R}$

$$\max A \cap B \cap \mathbb{Q}, \ \max A \cap \mathbb{R}^+.$$

c) Indique, se existir em $\widetilde{\mathbb{R}}$, o ínfimo do conjunto $A \cap \mathbb{R}^-$.

Em $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\inf A \cap \mathbb{R}^- = \inf(]-\infty, -3] \cup [-1, 0[) = -\infty$

2. Calcule, se existir em $\widetilde{\mathbb{R}}$, o limite das sucessões seguintes: (4 val)

$$\frac{2n^{10}+6n^3+5}{5n^{12}+7n^6+33n-12}, \qquad n^2\cos(n\pi), \qquad \sqrt[n]{\frac{3n^3+2}{2^n-n}}, \qquad \left(1-\frac{2}{n^4}\right)^{n^2}$$

$$\lim \frac{2n^{10}+6n^3+5}{5n^{12}+7n^6+33n-12} = \lim \frac{2+6/n^7+5/n^{10}}{5+7/n^6+33/n^{11}-12/n^{10}} \lim \frac{1}{n^2}$$
$$= \frac{2}{5}\times 0 = 0.$$

Seja $u_n = n^2\cos(n\pi) = n^2(-1)^n$ e consideremos as subsucessões $u_{2n} = n^2$ e $u_{2n+1} = -n^2$. Como $\lim u_{2n} = +\infty$ e $\lim u_{2n+1} = -\infty$ o limite não existe em $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Seja $v_n = \frac{3n^3+2}{2^n-n}$ e, atendendo a que $v_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, consideremos a sucessão v_{n+1}/v_n. Como

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(1+\frac{1}{n})^3+\frac{2}{n^3}}{3+\frac{2}{n^3}} \cdot \frac{1-\frac{n}{2^n}}{2-\frac{n+1}{2^n}} \to \frac{1}{2}$$

concluímos que $\lim \sqrt[n]{\frac{3n^3+2}{2^n-n}} = \frac{1}{2}$.

$\lim \left(1-\frac{2}{n^4}\right)^{n^2} = \lim \left(\left(1+\frac{-2}{n^4}\right)^{n^4}\right)^{\frac{1}{n^2}} = (e^{-2})^0 = 1.$

II

Considere a função real de variável real definida por (6 val)

$$f(x) = \frac{2}{|e^{2x}-e^{-2x}|} + \operatorname{arctg}(3x).$$

1. Determine o domínio de f.

Para x pertencer ao domínio de f devemos ter $e^{2x}-e^{-2x} \neq 0$. Como

$$e^{2x}-e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{4x}-1 = 0 \Leftrightarrow e^{4x} = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

o domínio de f é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2. Calcule, se existir em $\widetilde{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to 0} f(x).$$

Será f prolongável por continuidade a $x = 0$?

Como $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}(3x) = \operatorname{arctg} 0 = 0$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{|e^{2x}-e^{-2x}|} = +\infty$$

temos $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ o que implica que f não é prolongável por continuidade a $x = 0$

3. Estude f quanto à continuidade.

Sendo $x \mapsto 3x$ (polinomial) e $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ funções contínuas o teorema da continuidade da função composta garante que $x \mapsto \operatorname{arctg}(3x)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Da mesma forma a continuidade das funções $x \mapsto \pm 2x$ e $x \mapsto e^x$ garante que $x \mapsto e^{\pm 2x}$ são contínuas em $\mathbb{R}$. Como $x \mapsto |x|$ é contínua, em $\mathbb{R}$, os teoremas da diferença e quociente garantem que f é contínua no seu domínio.

4. Calcule, se existir em $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e determine, justificando, o contradomínio de f.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{|e^{2x}-e^{-2x}|} + \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(3x) \\
&= \frac{2}{\lim_{x\to-\infty} |e^{2x}-e^{-2x}|} + \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(3x) \\
&= \frac{2}{+\infty} + (-\frac{\pi}{2}) \\
&= -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por um lado, sendo $f(x) > -\frac{\pi}{2}$ para todo o $x \neq 0$ e f contínua em $]-\infty, 0[$ o teorema do valor intermédio garante, atendendo ao valores de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, que $f(]-\infty, 0[) =]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$. Por outro lado $f(x) \geq 0$, para todo o $x \geq 0$, logo concluímos que o contradomínio de f é $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$.

III

Seja (u_n) a sucessão definida por (5 val)

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3}, \\ u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \quad \text{para} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

1. Mostre por indução matemática que $\sqrt{3} \leq u_n < 3$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Será (u_n) uma sucessão limitada?

Para $n = 1$ a condição acima fica $\sqrt{3} \leq u_1 = \sqrt{3} < 3$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: Para um dado $n \in \mathbb{N}_1$ temos $\sqrt{3} \leq u_n < 3$.
Tese: $\sqrt{3} \leq u_{n+1} < 3$.
Usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} \leq u_n < 3 \quad &\Rightarrow \quad 3+\sqrt{3} \leq 3+u_n < 6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3+\sqrt{3}} \leq \sqrt{3+u_n} < \sqrt{6} \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{3} < \sqrt{3+\sqrt{3}} \leq u_{n+1} < \sqrt{2}\sqrt{3} < 3 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 3,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.
Como $|u_n| < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, concluímos que (u_n) é uma sucessão limitada.

2. Demonstre por indução matemática que (u_n) é crescente.

(u_n) é crescente sse $u_{n+1} - u_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Para $n = 1$ a condição anterior fica $u_2 - u_1 = \sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3} \geq 0$ que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: Para um dado $n \in \mathbb{N}_1$ temos $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

Da definição por recorrência acima, temos

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \sqrt{3+u_{n+1}} - u_{n+1} = \sqrt{3+u_{n+1}} - \sqrt{3+u_n} \\ &= \frac{3+u_{n+1}-(3+u_n)}{\sqrt{3+u_{n+1}}+\sqrt{3+u_n}} \\ &= \frac{u_{n+1}-u_n}{\sqrt{3+u_{n+1}}+\sqrt{3+u_n}}. \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução temos $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$, como queríamos demonstrar.

3. Indique, justificando, se (u_n) é uma sucessão convergente, determinando o seu limite, caso este exista.

(u_n) é limitada e crescente logo é convergente. Seja $\lim u_n = a$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{3+u_n} = \sqrt{3+\lim u_n} \;\Rightarrow\; a = \sqrt{3+a} \;\Rightarrow\; a^2 - a - 3 = 0,$$

logo concluímos que $\lim u_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.