

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame

LEIC-A, LEMat, LEAmb, LEAN, MEAer,
 MEBiol, MEC, MEEC, MEMec, MEQ - 2ª fase

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{R} : (4 val)

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x-6}{3-4x} \leq 1 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{x^2-10} \leq 1 \right\}$$

- a) Mostre que $A =]-\infty, \frac{3}{4}[\cup [\frac{3}{2}, +\infty[.$
- b) Determine $A \cap B$ sob a forma de reunião de intervalos.
- c) Determine, caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$, ou mostre que não existem

$$\inf A, \inf A \cap B, \sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \max A \cap B \cap \mathbb{Q}, \min A \cap \mathbb{R}^+.$$

II

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por (5 val)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}, & \text{se } x > 0 \\ \log(1-x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- 1. Mostre que f é contínua no ponto 0.
- 2. Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e determine $f'(x)$, para $x \neq 0$.
- 3. Determine, se existirem, as derivadas laterais de f no ponto 0. Diga, justificando, se a função f é diferenciável em 0.
- 4. Determine os intervalos, contidos em \mathbb{R}^+ , em que f é monótona. Justifique.
- 5. Mostre que f tem um mínimo absoluto no ponto 0.

III

1. Determine uma primitiva de (2 val)

a) $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$ b) $\frac{1 + 2 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (6 val)

$$f(x) = \frac{5 - 3x}{x^3 + x^2 + 3x + 3}.$$

- a) Calcule os coeficientes $A, B, C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{5 - 3x}{x^3 + x^2 + 3x + 3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

- b) Determine, usando a alínea anterior, a função F , definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

- c) Justifique que a função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$G(x) = \int_1^{2+x^2} \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt,$$

é diferenciável e calcule $G'(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

- d) Calcule $G(0)$.

IV

Seja (u_n) a sucessão definida por (3 val)

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} \text{ para } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Mostre por indução matemática que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

2. Justifique que $u_n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$.

(Sugestão: Comece por verificar que, para $a > 0$, se tem $\frac{a^2 + 4}{2a} \geq 2$)

3. Mostre que (u_n) é decrescente.

4. Determine, se existir, o limite da sucessão (u_n) .