

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - LEIC
Licenciatura em Engenharia de Redes de Comunicação e Informação -LERCI

Exercícios de Teoria da Computação

Computabilidade

Paula Gouveia

Secção Ciência da Computação
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
2002/2003

1 Programas URM e funções URM-computáveis

1. Faça o fluxograma correspondente a cada um dos programa URM seguintes e indique as funções de aridade 1, 2 e 3 que são calculadas por estes programas. Para cada um dos programas diga ainda se é ou não normalizado e indique o respectivo espaço de trabalho (ρ).

(a) 1 J(2,3,5)
 2 S(1)
 3 S(3)
 4 J(1,1,1)

(b) 1 J(1,2,3)
 2 J(1,1,4)
 3 S(3)
 4 T(3,1)

(c) 1 J(1,2,6)
 2 S(2)
 3 S(3)
 4 J(1,2,6)
 5 J(1,1,2)
 6 T(3,1)

(d) 1 J(1,4,9)
 2 S(3)
 3 J(1,3,7)
 4 S(2)
 5 S(3)
 6 J(1,1,3)
 7 T(2,1)

(e) 1 J(1,3,6)
 2 S(2)
 3 S(2)
 4 S(3)
 5 J(1,1,1)
 6 T(2,1)

(f) 1 J(2,4,10)
 2 J(1,4,5)
 3 S(4)

- 4 J(1,1,1)
- 5 J(2,4,10)
- 6 J(3,5,11)
- 7 S(4)
- 8 S(5)
- 9 J(1,1,5)
- 10 S(6)
- 11 T(6,1)

2. Prove que as seguintes funções em $[N_0^n \rightarrow N_0]$, $n \in N_0$, são URM-computáveis e, para cada um dos programas desenvolvidos, diga se o programa é ou não um programa normalizado e indique qual o valor do seu espaço de trabalho (ρ):

- (a) $h(x, y) = x + y$
- (b) $h(x) = sg(x)$ (se $x = 0$ então 0 senão 1)
- (c) $h(x) = \underline{sg}(x)$ (se $x \neq 0$ então 0 senão 1)
- (d) $h(x, y) = \max(x, y)$
- (e) $h(x, y) = \min(x, y)$
- (f) $h(x) = x \dot{-} 1$ (x múnus 1, i.e., se $x \geq 1$ então $x - 1$ senão 0)
- (g) $h(x, y) = \text{se } (x \leq 2) \text{ então } 1 \text{ senão } 0$
- (h) $h(x) = \text{se } x \text{ é múltiplo de } 3 \text{ então } x/3$
- (i) $h(x, y) = x \times y$
- (j) $h(x, y) = x \dot{-} y$ (x múnus y , i.e., se $x \geq y$ então $x - y$ senão 0)
- (k) $h(x, y) = \text{se } x \geq y \text{ então } x - y$
- (l) $h(x, y) = |x - y|$
- (m) $h(x) = \text{quociente da divisão de } x \text{ por } 2$
- (n) $h(x, y) = x^y$
- (o) $h(x) = \sum_{1 \leq i \leq x} i$
- (p) $h(x) = y$ onde y é o número de ocorrências em x do maior dígito de x . Só pode usar os oráculos DIGN, DEZ e LESS.
- (q) $h(x) = y$ onde y é o número que se obtém eliminando de x os dígitos que surgem em posições pares, assumindo que o primeiro dígito é o das unidades, o segundo o das dezenas, etc. Por exemplo, $h(635798) = 378$. Só pode usar os oráculos SUM, DEZ, PROD, DIGN.
- (r) $h(x) = 1$ se x é um palíndromo e $h(x) = 0$ caso contrário. Só pode utilizar os oráculos SUB1, DEZ, LESS, DIGN.
- (s) $h(x) = 1$ se x é um palíndromo e $h(x) = 0$ caso contrário. Só pode utilizar os oráculos SUM, DEZ, PROD, DIGN.
- (t) $h(x) = y$ onde y é o número que é obtido invertendo a ordem dos dígitos de x . Por exemplo, $h(345) = 543$. Pode usar os oráculos SUM e DEZ.

3. Prove que os seguintes predicados sobre os naturais são URM-decidíveis:

- (a) $P(x) = “x \text{ é igual a } 3”$
- (b) $P(x) = “x \text{ é diferente de } 3”$
- (c) $P(x) = “x \text{ é maior que } 3”$
- (d) $P(x) = “x \text{ é menor ou igual a } 3”$
- (e) $P(x, y) = “x \text{ é igual a } y”$
- (f) $P(x, y) = “x \text{ é diferente de } y”$
- (g) $P(x, y) = “x \text{ é menor que } y”$
- (h) $P(x, y) = “x \text{ é maior que } y”$
- (i) $P(x, y) = “x \text{ é maior ou igual que } y”$
- (j) $P(x) = “x \text{ é par}”$
- (k) $P(x) = “x \text{ é ímpar}”$
- (l) $P(x) = “x \text{ é múltiplo de } 3”$
- (m) $P(x) = “x \text{ não é múltiplo de } 3”$

2 Funções parciais recursivas

1. Prove que as seguintes funções em $[N_0^n \rightarrow N_0]$, $n \in N_0$, são funções parciais recursivas:

- (a) $h(x, y) = x + y$
- (b) 1. $h(x) = x \dot{-} 1$ (x múnus 1, i.e., se $x \geq 1$ então $x - 1$ senão 0)
2. $h(x, y) = x \dot{-} y$ (x múnus y , i.e., se $x \geq y$ então $x - y$ senão 0)
- (c) $h(x, y) = |x - y|$
- (d) 1. $h_1(x, y) = \max(x, y)$
2. $h_2(x, y) = \min(x, y)$
- (e) 1. $c_0 = 0$
2. $c_1 = 1$
3. $c_k = k$ onde $k \in N_0$
4. $h_0(x) = 0$
5. $h_1(x) = 1$
6. $h_k(x) = k$ onde $k \in N_0$
- (f) $h(x, y) = x \times y$
- (g) $h(x) = x!$
- (h) $h(x, y) = x^y$
- (i) 1. $h(x, y) = \sum_{i < y} x^i$
onde se assume que $\sum_{i < 0} x^i = 0$
2. $h(x, y) = \prod_{i < y} x^i$
onde se assume que $\prod_{i < 0} x^i = 1$

- (j) 1. $h(x, y) = \sum_{i < y} f(x, i)$
onde f é uma aplicação de aridade 2 parcial recursiva
e se assume que $\sum_{i < 0} f(x, i) = 0$
2. $h(x, y) = \prod_{i < y} f(x, i)$
onde f é uma aplicação de aridade 2 parcial recursiva
e se assume que $\prod_{i < 0} f(x, i) = 1$
- (k) 1. $sg(x) =$ se $x = 0$ então 0 senão 1
2. $\underline{sg}(x) =$ se $x \neq 0$ então 0 senão 1
- (l) $h(x, y) =$ se $x > y$ então 1 senão 0
- (m) $h(x, y) =$ se $x > y$ então $x + 1$ senão $y + 1$
- (n) $h(x, y) =$ se $x \geq y$ então x^y senão y^x
- (o) $h(x, y, z) =$ se $x \leq (y + z)$ então $x + y$ senão $x + z$
- (p) $rm(x, y) =$ se $x = 0$ então y senão resto da divisão inteira de y por x
- (q) $qt(x, y) =$ se $x = 0$ então 0 senão quociente da divisão inteira de y por x
- (r) $div(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é divisor de } y \text{ ou } x = y = 0 \\ 0 & \text{se } x \text{ não é divisor de } y \text{ ou } (x = 0 \text{ e } y \neq 0) \end{cases}$
- (s) 1. $h(x) =$ se x é quadrado perfeito então $\sqrt{x}$
2. $h(x) =$ se x é cubo perfeito então $\sqrt[3]{x}$
- (t) 1. $h(x) = x/2$ se x é par
2. $h(x) = x/4$ se x é múltiplo de 4
- (u) 1. $h(x) =$ raiz quadrada inteira de x
2. $h(x) =$ raiz cúbica inteira de x
- (v) $h(x, y) =$ quociente da divisão inteira de y por x se $x \neq 0$
- (w) $h(x, y) = x - y$ se $x \geq y$
- (x) $h(x, y) = y/x$ se x é divisor de y e $x \neq 0$
- (y) $mod(x, y) =$ se $x \neq 0$ resto da divisão de y por x
- (z) $f^{-1}(x)$
sendo f uma aplicação parcial recursiva unária injectiva
2. Sejam $k, n \in \mathbb{N}_0$, $f \in [\mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0]$ e $g_1, \dots, g_k \in [\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0]$. Mostre que se f e $g_1, \dots, g_k$ são funções URM-computáveis então a função h definida por substituição (ou composição) a partir de f e $g_1, \dots, g_k$ também é URM-computável.
3. Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in [\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0]$ e $g \in [\mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0]$. Mostre que se f e g são funções URM-computáveis então a função h definida por recursão a partir de f e g também é URM-computável.
4. Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in [\mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0]$. Mostre que se f é URM-computável então a função g definida a partir de f por minimização é URM-computável.
5. Prove *axiomaticamente* que as funções descritas em 1. são URM-computáveis.

6. Seja $f \in [N_0^n \rightarrow N_0]$, $n \in N_0$, uma função total URM-computável. Prove *axiomaticamente* e sem utilizar minimização que

$$g(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} \text{o menor } z < y \text{ tal que} \\ f(x_1, \dots, x_n, z) = 0 & \text{se existir tal } z \\ y & \text{se não existir tal } z \end{cases}$$

é URM-computável.

7. Prove *axiomaticamente* que as seguintes funções em $[N_0^n \rightarrow N_0]$, $n \in N_0$, são URM-computáveis:

(a) $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \text{número de divisores de } x & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

(b) $Pr(x) = \text{se } x \text{ é primo então } 1 \text{ senão } 0$

(c) $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x\text{-ésimo número primo} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

assumindo-se que o primeiro primo é 2, o segundo é 3, ...

(d) $exp(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ \text{o expoente do } y\text{-ésimo número primo} \\ \text{na factorização prima de } x & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$

(e) $dg(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \text{número de dígitos de } x \text{ (base decimal)} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

8. Prove *axiomaticamente* que os predicados sobre os naturais seguintes são decidíveis:

(a) $P(x, y) = \text{"} x \text{ é igual a } y \text{"}$

(b) $P(x, y) = \text{"} x \text{ é diferente de } y \text{"}$

(c) $P(x, y) = \text{"} x \text{ é maior ou igual que } y \text{"}$

(d) $P(x, y) = \text{"} x \text{ é maior que } y \text{"}$

(e) $P(x, y) = \text{"} x \text{ é menor ou igual que } y \text{"}$

(f) $P(x, y) = \text{"} x \text{ é menor que } y \text{"}$

(g) $P(x) = \text{"} x \text{ é par"}$

(h) $P(x) = \text{"} x \text{ é ímpar"}$

(i) $P(x) = \text{"} x \text{ é múltiplo de } 3 \text{"}$

(j) $P(x) = \text{"} x \text{ não é múltiplo de } 5 \text{"}$

(k) $P(x) = \text{"} x \text{ é um quadrado perfeito"}$

9. Mostre que se M e N são predicados sobre os naturais de aridade n decidíveis então também são decidíveis os predicados

- (a) $\neg M$
- (b) $M \wedge N$
- (c) $M \vee N$

10. Seja M um predicado sobre os naturais de aridade $n + 1$ decidível. Mostre que são decidíveis os predicados

- (a) $M_1(x_1, \dots, x_n, y) = \text{“}M(x_1, \dots, x_n, z) \text{ para todo } z < y\text{”}$
- (b) $M_2(x_1, \dots, x_n, y) = \text{“existe } z < y \text{ tal que } M(x_1, \dots, x_n, z)\text{”}$

11. Seja M um predicado sobre os naturais de aridade $n + 1$ decidível.

- (a) Mostre que é URM computável a função $g \in [\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0]$ tal que

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \text{o menor } z < y \text{ tal que} \\ M(x_1, \dots, x_n, z) & \text{se existir tal } z \\ 0 & \text{se não existir tal } z \end{cases}$$

- (b) Mostre que é URM computável a função $g \in [\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0]$ tal que

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \text{o menor } z \text{ tal que} \\ M(x_1, \dots, x_n, z) & \text{se existir tal } z \\ \text{não definida} & \text{se não existir tal } z \end{cases}$$

3 Godelização de programas URM

1. Sendo $\pi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\xi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\beta : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{N}_0$ e $\tau : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}_0^k) \rightarrow \mathbb{N}_0$ as bijecções estudadas, calcule:

- (a) $\pi(1, 0)$, $\pi(2, 4)$, $\pi(3, 2)$, $\pi(4, 2)$ e $\pi(3, 5)$
- (b) $\pi^{-1}(4)$, $\pi^{-1}(31)$, $\pi^{-1}(39)$, $\pi^{-1}(47)$, $\pi^{-1}(72)$, $\pi^{-1}(83)$, $\pi^{-1}(103)$ e $\pi^{-1}(83)$
- (c) $\xi(1, 1, 1)$, $\xi(1, 2, 1)$, $\xi(3, 1, 3)$ e $\xi(3, 4, 5)$
- (d) $\xi^{-1}(19)$, $\xi^{-1}(39)$, $\xi^{-1}(103)$, $\xi^{-1}(159)$ e $\xi^{-1}(191)$
- (e) $\beta(Z(1))$, $\beta(Z(5))$, $\beta(S(3))$, $\beta(S(6))$, $\beta(T(2, 11))$, $\beta(T(3, 4))$, $\beta(J(1, 1, 1))$ e $\beta(J(2, 1, 2))$
- (f) $\beta^{-1}(8)$, $\beta^{-1}(12)$, $\beta^{-1}(13)$, $\beta^{-1}(25)$, $\beta^{-1}(34)$, $\beta^{-1}(39)$, $\beta^{-1}(58)$ e $\beta^{-1}(79)$
- (g) $\tau(1, 1, 1)$, $\tau(2, 0, 1)$, $\tau(3, 2, 1)$, $\tau(1, 2, 3)$, $\tau(0, 2, 1)$ e $\tau(1, 3, 0)$
- (h) $\tau^{-1}(8)$, $\tau^{-1}(13)$, $\tau^{-1}(24)$, $\tau^{-1}(41)$, $\tau^{-1}(71)$, $\tau^{-1}(129)$ e $\tau^{-1}(241)$

2. Indique o código do programa URM:

- (a) $\langle Z(1) \rangle$
- (b) $\langle S(1) \rangle$
- (c) $\langle T(2, 1) \rangle$

- (d) $\langle Z(1), S(1), S(1) \rangle$
- (e) $\langle T(2,1), S(1), S(1) \rangle$
- (f) $\langle S(2), S(2), T(2,1) \rangle$
- (g) $\langle J(1,2,2) \rangle$
- (h) $\langle J(2,1,1), S(1) \rangle$
- (i) $\langle J(2,3,5), S(1), S(3), J(1,1,1) \rangle$
- (j) $\langle J(1,2,3), J(1,1,4), S(3), T(3,1) \rangle$

3. Indique os programas URM cujos códigos são:

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4
- (f) 5
- (g) 6
- (h) 7
- (i) 8
- (j) 9
- (k) 10
- (l) 65
- (m) 503
- (n) 100
- (o) 8234
- (p) 169
- (q) 123
- (r) 321
- (s) 231
- (t) 127
- (u) 255
- (v) 4159
- (w) 513
- (x) 700
- (y) 2002
- (z) 8197

4. Calcule ϕ_7 , W_7 e E_7

5. Calcule ϕ_{20} , W_{20} e E_{20}

6. Calcule ϕ_{68} , W_{68} e E_{68}

7. Calcule

(a) ϕ_{159} , W_{159} e E_{159}

(b) ϕ_{159}^2 , W_{159}^2 e E_{159}^2

8. Calcule

(a) ϕ_{639} , W_{639} e E_{639}

(b) ϕ_{639}^2 , W_{639}^2 e E_{639}^2

9. Calcule

(a) ϕ_{1343} , W_{1343} e E_{1343}

(b) ϕ_{1343}^2 , W_{1343}^2 e E_{1343}^2

10. Calcule

(a) ϕ_{4127} , W_{4127} e E_{4127}

(b) ϕ_{4127}^2 , W_{4127}^2 e E_{4127}^2

11. Calcule

(a) ϕ_{8224} , W_{8224} e E_{8224}

(b) ϕ_{8224}^2 , W_{8224}^2 e E_{8224}^2