Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - LEIC
Licenciatura em Engenharia de Redes de Comunicação e Informação - LERCI

Exercícios de Teoria da Computação

Autómatos, gramáticas e expressões regulares

Paula Gouveia

Secção Ciência da Computação
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
2003/2004

1 Autómatos finitos

1.1 Autómatos finitos deterministas

1. Defina um autómato finito determinista que, de entre as sequências formadas por elementos de $\{x, ., c\}$, apenas aceite as que têm $.c$ no fim. Discuta como a partir deste autómato pode construir um outro autómato finito determinista que apenas aceite as sequências de elementos do alfabeto português que têm $.c$ no fim.

2. Defina um autómato finito determinista que, de entre as sequências formadas por elementos de $\{a, ..., z, 0, ..., 9\}$, apenas aceite as que começam por uma letra (i.e., as sequências que são frequentemente utilizadas como identificadores em linguagens de programação).

3. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm pelo menos três 1's.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato:

   - ϵ
   - 011
   - 111
   - 01011

4. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's que verifiquem pelo menos um dos seguintes requisitos: (i) começam por 0; (ii) terminam em 1.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato:

   - ϵ
   - 00
   - 010
   - 101
   - 110

5. Seja L o conjunto das sequências de a's e b's que verifiquem pelo menos um dos seguintes requisitos: (i) contêm dois a's consecutivos, (ii) contêm dois b's consecutivos.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato:

   - ϵ

- aa
- aba
- baa

6. Seja L o conjunto das sequências de a's e b's que entre dois a's consecutivos tenham no máximo um b.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato:

   - ϵ
   - ba
   - bba
   - aba
   - $abba$

7. Defina um autómato finito determinista que aceite todas as sequências de 0's e 1's que verifiquem pelo menos um dos seguintes requisitos: (i) começam em 0 e têm comprimento par, (ii) começam em 1 e têm comprimento ímpar.

8. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's com um número par de 0's e um número ímpar de 1's.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato:

   - 01
   - 111
   - 001
   - 0110

9. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's não vazias e tal que têm 1 em cada posição ímpar.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato:

   - 01
   - 101
   - 001
   - 110

10. Defina um autómato finito determinista que, de entre as sequências formadas por elementos de $\{x, ., c\}$, apenas aceite as do tipo $\alpha.c$ onde α é uma sequência não vazia de elementos do conjunto $\{x, c\}$. Discuta como a partir deste autómato pode construir um outro autómato finito determinista que apenas aceite as sequências do tipo $\beta.c$ onde β é uma sequência não vazia de letras do alfabeto português.

11. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências elementos do conjunto $\{x, ., @\}$ do tipo $\alpha_1@\alpha_2$ onde $\alpha_1 \in \{x\}^*$ é uma sequência não vazia e $\alpha_2 \in \{x, .\}^*$ é uma sequência que começa e termina em x, tem pelo menos um . e não contém dois .'s consecutivos.

    Discuta como a partir deste autómato pode construir um outro autómato finito determinista que apenas aceite as sequências do tipo $\beta_1@\beta_2$ onde β_1 é uma sequência não vazia de letras do alfabeto português e β_2 é uma sequência de letras do alfabeto português e . que começa e termina com uma letra, tem pelo menos um . e que não contém dois .'s consecutivos.

12. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's e b's cujo comprimento seja múltiplo de 4.

13. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's, b's e c's que contêm bab como subsequência, ou seja, o conjunto das sequências do tipo $\beta_1 bab \beta_2$ onde β_1 e β_2 são sequências de a's, b's e c's.

14. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's, b's e c's que contêm ba ou ca como subsequência, ou seja, o conjunto das sequências do tipo $\beta_1\alpha\beta_2$ onde β_1 e β_2 são sequências de a's, b's e c's e $\alpha \in \{ba, ca\}$.

15. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's, b's e c's que contêm exactamente um c e antes do c, não contêm duas letras consecutivas iguais.

16. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's, b's e c's que verificam pelo menos uma das seguintes condições: (i) têm comprimento 1; (ii) começam em ac e terminam em b.

17. Uma constante numérica é constituída por uma parte inteira (sequência de dígitos de 0 a 9) e por uma parte decimal (sequência de dígitos de 0 a 9) separadas por . que pode ser omitido no caso da parte decimal ser vazia. A parte inteira e a parte decimal não podem ser ambas vazias.

    (a) Defina um autómato finito determinista D_1 que reconheça exactamente as sequências do tipo $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica com parte decimal não vazia.

    (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato D_1:

    - .35
    - -1.5
    - +.41

- -2.
- +.

(c) Modifique o autómato D_1 por forma a que reconheça apenas as sequências de L_{D_1} nas quais a parte inteira da constante numérica é vazia, 0 ou uma sequência que não começa por 0 (ou seja, as sequências cuja parte inteira da constante numérica não tem zeros à esquerda excepto no caso em que essa parte inteira é apenas 0).

(d) Defina um autómato finito determinista D_2 que reconheça exactamente as sequências do tipo w, $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica.

(e) Repita o exercício 17b agora para o autómato D_2.

(f) Modifique o autómato D_2 por forma a que reconheça apenas as sequências de L_{D_2} que verifiquem o requisito referido no exercício 17c.

1.2 Propriedades de fecho de linguagens regulares

1. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de 0's e 1's que contêm pelo menos dois 0's e no máximo um 1. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

2. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de 0's e 1's que contêm pelo menos um 0 e um número ímpar de 1's. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

3. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de 0's e 1's que terminam em 1 e têm um número par de 0's. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

4. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de a's e b's que começam e terminam em a e têm pelo menos um b. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

5. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de a's e b's com um número ímpar de b's e que entre dois a's consecutivos tenham no máximo um b. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

6. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

   - $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
   - $I = \{0, 1\}$
   - $\delta = Q \times I \to Q$ tal que

δ	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_1
q_2	q_3	q_2
q_3	q_3	q_2

   - $F = \{q_1, q_2\}$

   Construa um autómato finito determinista cuja linguagem seja $\{0,1\}^* \backslash L_D$.

7. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

    - $Q = \{a, b, c, d\}$
    - $I = \{0, 1\}$
    - $\delta(a, 0) = \delta(c, 0) = a$
      $\delta(a, 1) = \delta(b, 1) = \delta(d, 1) = b$
      $\delta(b, 0) = c$
      $\delta(c, 1) = d$
    - $q_0 = a$
    - $F = \{d\}$.

    Construa um autómato finito determinista cuja linguagem seja $\{0, 1\}^* \backslash L_D$.

8. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

    - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
    - $I = \{a, b, c\}$
    - $\delta = Q \times I \to Q$ tal que

δ	a	b	c
q_0	q_1	nd	nd
q_1	q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_2	q_2

    - $F = \{q_2\}$

    Construa um autómato finito determinista cuja linguagem seja $\{a, b\}^* \backslash L_D$.

9. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de 0's e 1's distintas de 11 e de 111. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

10. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de 0's e 1's que não contenham 110 como subsequência. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

11. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das palavras sobre $\{a, b\}$ que não contêm dois a's consecutivos nem contêm dois b's consecutivos. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

12. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de 0's e 1's que não terminam em 01 nem em 111. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

13. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de a's e b's que terminam em ba e não têm um número ímpar de a's. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

14. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de a's e b's que não começam em ab e não têm aba como subsequência. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

15. Seja L o conjunto das sequências de 0's, 1's e 2's cuja soma de quaisquer dois números consecutivos seja 2 e a soma total seja par.

    (a) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja L.

    (b) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja $\{0,1,2\}^* \backslash L$

    (c) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de 0's, 1's e 2's cuja soma de quaisquer dois números consecutivos seja 2, a soma total seja par e contenha um número par de 0's.

16. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de a's e b's que começam por a, têm pelo menos três b's e verificam pelo menos um dos seguintes requisitos: (i) contêm dois a's consecutivos, (ii) contêm dois b's consecutivos. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

17. Sendo L uma linguagem regular mostre que as seguintes linguagens são também regulares.

    (a) $L_1 = \{w : w \in L$ e não existe nenhum prefixo próprio de w que pertença a $L\}$

    (b) $L_2 = \{w : w \in L$ e não existe nenhuma sequência não vazia w' tal que $ww' \in L\}$

    (c) $L_3 = \{w :$ existe uma sequência w' tal que $ww' \in L\}$

    (d) $L^r = \{w^r : w \in L\}$ onde, sendo $w = a_1a_2 \ldots a_n$, $n \in I\!N_0$, $w^r = a_n \ldots a_2a_1$

1.3 Equivalência e minimização de autómatos

1. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

    - $Q = \{p, q, r\}$
    - $I = \{0, 1\}$
    - $\delta(r, 0) = p$
      $\delta(p, 0) = \delta(q, 0) = q$
      $\delta(r, 1) = \delta(p, 1) = \delta(q, 1) = r$
    - $q_0 = p$
    - $F = \{p, q\}$.

    Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

2. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

    - $Q = \{p, q, r, s\}$
    - $I = \{0, 1\}$
    - $\delta(p, 0) = \delta(q, 0) = \delta(s, 1) = q$
      $\delta(r, 1) = \delta(p, 1) = \delta(q, 1) = r$
      $\delta(s, 0) = \delta(r, 0) = s$
    - $q_0 = p$

- $F = \{q\}$.

Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

3. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

   - $Q = \{p, q, r, s\}$
   - $I = \{a, b\}$
   - $\delta(s, a) = p$
     $\delta(p, b) = \delta(r, a) = q$
     $\delta(q, a) = r$
     $\delta(q, b) = \delta(r, b) = \delta(s, b) = s$
   - $q_0 = p$
   - $F = \{s\}$.

   Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

4. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

   - $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $I = \{a, b\}$
   - $\delta(p_0, b) = \delta(p_1, b) = p_1$
     $\delta(p_0, a) = \delta(p_1, a) = \delta(p_3, b) = p_2$
     $\delta(p_2, a) = p_3$
     $\delta(p_3, a) = \delta(p_4, a) = \delta(p_4, b) = p_4$
   - $q_0 = p_0$
   - $F = \{p_3, p_4\}$.

   Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

5. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

   - $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
   - $I = \{0, 1\}$
   - $\delta(c, 0) = a$
     $\delta(a, 0) = b$
     $\delta(b, 1) = \delta(c, 1) = \delta(d, 0) = \delta(f, 0) = \delta(h, 1) = c$
     $\delta(g, 1) = e$
     $\delta(a, 1) = \delta(e, 1) = f$
     $\delta(b, 0) = \delta(d, 1) = \delta(f, 1) = \delta(g, 0) = \delta(h, 0) = g$
     $\delta(e, 0) = h$
   - $q_0 = a$
   - $F = \{c\}$.

Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

6. Sejam $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_2)$ e $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$ dois autómatos finitos deterministas tais que

   - $Q_1 = \{a, b\}$
   - $I = \{0, 1\}$
   - $\delta_1(a, 0) = \delta_1(b, 0) = a$
     $\delta_1(a, 1) = \delta_1(b, 1) = b$
   - $q_0^1 = a$
   - $F_1 = \{a\}$.

   e

   - $Q_2 = \{c, d, e\}$
   - $I = \{0, 1\}$
   - $\delta_2(e, 0) = c$
     $\delta_2(d, 0) = \delta_2(c, 0) = d$
     $\delta_2(e, 1) = \delta_2(c, 1) = \delta_2(d, 1) = e$
   - $q_0^2 = c$
   - $F_2 = \{c, d\}$.

   As linguagens reconhecidas pelos dois autómatos são iguais? Justifique.

7. Sejam $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_2)$ e $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$ dois autómatos finitos deterministas tais que $I = \{a, b\}$ e

   - $Q_1 = \{q_0, q_1\}$
   - $\delta_1(q_0, b) = \delta_1(q_1, a) = q_0$
     $\delta_1(q_1, b) = \delta_1(q_0, a) = q_1$
   - $q_0^1 = q_0$
   - $F_1 = \{q_0\}$.

   e

   - $Q_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $\delta_2(p_0, b) = \delta_2(p_1, b) = \delta_2(p_4, b) = p_1$
     $\delta_2(p_0, a) = \delta_2(p_3, b) = p_2$
     $\delta_2(p_1, a) = \delta_2(p_2, b) = p_3$
     $\delta_2(p_3, a) = \delta_2(p_2, a) = p_4$
   - $q_0^2 = p_0$
   - $F_2 = \{p_0, p_1, p_4\}$.

   (a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_{D_2} e tenha menos estados que D_2? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente a linguagem em causa e tenha o menor número possível de estados.

(c) As linguagens reconhecidas pelo dois autómatos são iguais? Justifique.

8. Sejam $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_2)$ e $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$ dois autómatos finitos deterministas tais que $I = \{0, 1\}$ e

   - $Q_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$
   - $\delta_1(q_0, 1) = \delta_1(q_1, 1) = \delta_1(q_2, 1) = q_1$
     $\delta_1(q_1, 0) = \delta_1(q_2, 0) = q_2$
   - $q_0^1 = q_0$
   - $F_1 = \{q_2\}$.

   e

   - $Q_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$
   - $\delta_2(p_0, 1) = \delta_2(p_2, 1) = p_1$
     $\delta_2(p_1, 1) = \delta_2(p_3, 1) = p_2$
     $\delta_2(p_3, 0) = \delta_2(p_1, 0) = \delta_2(p_2, 0) = p_3$
   - $q_0^2 = p_0$
   - $F_2 = \{p_3\}$.

   (a) As linguagens reconhecidas pelo dois autómatos são iguais? Justifique.

   (b) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_{D_1} e tenha menos estados que D_1? Justifique.

9. Sejam $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_2)$ e $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$ dois autómatos finitos deterministas tais que $I = \{a, b\}$ e

   - $Q_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$
   - $\delta_1(q_0, b) = q_0$
     $\delta_1(q_0, a) = q_1$
     $\delta_1(q_2, a) = \delta_1(q_2, b) = \delta_1(q_1, a) = q_2$
   - $q_0^1 = q_0$
   - $F_1 = \{q_2\}$.

   e

   - $Q_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $\delta_2(p_0, b) = \delta_2(p_1, b) = p_1$
     $\delta_2(p_0, a) = \delta_2(p_1, a) = \delta_2(p_3, b) = p_2$
     $\delta_2(p_2, a) = p_3$
     $\delta_2(p_3, a) = \delta_2(p_4, a) = \delta_2(p_4, b) = p_4$
   - $q_0^2 = p_0$

- $F_2 = \{p_3, p_4\}$.

(a) As linguagens reconhecidas pelo dois autómatos são iguais? Justifique.

(b) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_{D_1} e tenha menos estados que D_1? Justifique.

(c) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_{D_2} e tenha menos estados que D_2? Justifique.

(d) Se respondeu afirmativamente a alguma das duas alíneas anteriores, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente a linguagem em causa e tenha o menor número possível de estados.

10. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

    - $Q = \{p_0, p_1, p_2\}$
    - $I = \{a, b\}$
    - $\delta(p_0, b) = \delta(p_1, a) = p_0$
      $\delta(p_0, a) = \delta(p_2, b) = p_1$
      $\delta(p_1, b) = \delta(p_2, a) = p_2$
    - $q_0 = p_0$
    - $F = Q$.

    (a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

    (b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

11. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

    - $Q = \{p_0, p_1, p_2\}$
    - $I = \{a, b\}$
    - $\delta(p_0, b) = \delta(p_1, a) = p_0$
      $\delta(p_0, a) = \delta(p_2, b) = p_1$
      $\delta(p_1, b) = \delta(p_2, a) = p_2$
    - $q_0 = p_0$
    - $F = \{p_0, p_2\}$.

    (a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

    (b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

12. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$
- $I = \{a, b, c, d\}$
- $\delta(p_0, a) = \delta(p_1, d) = p_1$
  $\delta(p_0, b) = \delta(p_2, d) = p_2$
  $\delta(p_0, c) = \delta(p_3, d) = p_3$
  $\delta(p_1, a) = \delta(p_2, a) = \delta(p_3, a) = p_4$
  $\delta(p_4, b) = \delta(p_6, a) = q_5$
  $\delta(p_5, a) = p_6$
- $q_0 = p_0$
- $F = \{p_5, p_6\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

13. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
- $I = \{a, b\}$
- $\delta(p_0, b) = \delta(p_2, a) = p_1$
  $\delta(p_1, a) = \delta(p_5, b) = p_2$
  $\delta(p_1, b) = \delta(p_2, b) = \delta(p_3, a) = \delta(p_4, b) = p_3$
  $\delta(p_3, b) = p_4$
  $\delta(p_4, a) = \delta(p_5, a) = p_5$
- $q_0 = p_0$
- $F = \{p_3\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

14. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(c, 0) = a$
  $\delta(a, 0) = b$
  $\delta(b, 1) = \delta(c, 1) = \delta(d, 0) = \delta(f, 0) = \delta(h, 1) = c$
  $\delta(g, 1) = e$
  $\delta(a, 1) = \delta(e, 1) = f$
  $\delta(b, 0) = \delta(d, 1) = \delta(f, 1) = \delta(g, 0) = \delta(h, 0) = g$
  $\delta(e, 0) = h$

- $q_0 = a$
- $F = \{c\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

15. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(a, 1) = \delta(b, 0) = \delta(d, 1) = a$
  $\delta(a, 0) = \delta(c, 1) = b$
  $\delta(b, 1) = c$
  $\delta(c, 0) = \delta(d, 0) = \delta(e, 0) = \delta(h, 1) = d$
  $\delta(f, 1) = e$
  $\delta(e, 1) = \delta(g, 0) = f$
  $\delta(f, 0) = \delta(g, 1) = \delta(h, 0) = g$
- $q_0 = a$
- $F = \{d\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

16. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(i, 0) = a$
  $\delta(a, 0) = \delta(f, 1) = \delta(g, 1) = b$
  $\delta(b, 0) = \delta(h, 1) = c$
  $\delta(c, 1) = d$
  $\delta(a, 1) = \delta(i, 1) = e$
  $\delta(b, 1) = \delta(e, 0) = f$
  $\delta(f, 0) = g$
  $\delta(c, 1) = \delta(d, 1) = \delta(g, 0) = h$
  $\delta(e, 1) = \delta(h, 0) = i$
- $q_0 = a$
- $F = \{c, f, i\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

17. Considere os autómatos finitos deterministas que construiu nos exercícios da secção 1.1.

(a) Esses autómatos podem ser minimizados relativamente ao número de estados?

(b) Nos casos em que respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente a linguagem em causa e tenha o menor número possível de estados.

1.4 Lema da bombagem para linguagens regulares

1. Discuta as afirmações seguintes.

(a) A linguagem constituída pelas sequências de 0's e 1's que têm o mesmo número de 0's e de 1's é regular.

(b) A linguagem $L = \{0^n 1^n 2^n : n \geq 0\}$ é regular.

(c) A linguagem $L = \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ é regular.

(d) A linguagem $L = \{w \in \{0,1\}^* : w = 0^n 1^{f(n)}, n \geq 0\}$ é regular considerando $f : I\!N_0 \to I\!N_0$ tal que

i. $f(n) = 0$

ii. $f(n) = k$ onde k é uma constante

iii. $f(n) = 2n$

iv. $f(n) = n^2$

(e) A linguagem constituída pelas sequências de 0's e 1's que começam e terminam em 1 e têm o mesmo número de 0's e de 1's é regular.

(f) A linguagem constituída pelas sequências de a's e b's que começam em aa, terminam em bb e têm o mesmo número de a's e de b's é regular.

(g) A linguagem $L = \{(10)^n (01)^n : n \geq 0\}$ é regular.

(h) A linguagem constituída pelas sequências de 0's e 1's do tipo $1w0$ com $w \in \{0^{n+1} 1^{n-1} : n \geq 1\}$ é regular.

(i) A linguagem constituída pelas sequências de a's e b's que começam em ba, terminam em ab e têm o mesmo número de a's e de b's é regular.

(j) A linguagem constituída pelas sequências de 0's, 1's e 2's que são palíndromos ("capicuas").

2. Esboce um algoritmo para determinar se a linguagem reconhecida por um autómato finito determinista D é ou não infinita. Sugestão: recorra ao lema da bombagem.

1.5 Autómatos finitos não deterministas e algoritmo de conversão de autómatos finitos não deterministas para autómatos finitos deterministas

1. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm 1 na penúltima posição.

   (a) Defina um autómato finito não determinista cuja linguagem seja L.

   (b) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja L.

   (c) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de 0's e 1's que não têm 1 na penúltima posição. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

2. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm 1 na antepenúltima posição.

   (a) Defina um autómato finito não determinista cuja linguagem seja L.

   (b) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja L sem recorrer ao algoritmo estudado.

   (c) Usando o algoritmo estudado, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

   (d) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de 0's e 1's que não têm 1 na antepenúltima posição. Pode recorrer a teoremas sobre autómatos que conheça.

3. Seja L o conjunto das sequências não vazias de a's, b's e c's nas quais o último símbolo ocorre pelo menos duas vezes em toda a sequência. Defina um autómato finito não determinista cuja linguagem seja L.

4. Seja L o conjunto das sequências não vazias de a's, b's e c's nas quais o último símbolo ocorre uma única vez em toda a sequência. Defina um autómato finito não determinista cuja linguagem seja L.

5. Considere o seguinte autómato finito não determinista $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ tal que

   - $Q = \{p, q, r\}$,
   - $I = \{0, 1, 2\}$
   - $\delta(p, 0) = \{q\}$, $\delta(p, 1) = \{p, q\}$, $\delta(p, 2) = \{p\}$,
     $\delta(q, 1) = \{q, r\}$,
     $\delta(r, 2) = \{r\}$,
     $\delta(q, 0) = \delta(q, 2) = \delta(r, 0) = \delta(r, 1) = \emptyset$,
   - $q_0 = p$
   - $F = \{q, r\}$.

   (a) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato A:

      - 11
      - 10

- 120
- 212
- 2112
- 2212
- 0112

(b) Usando o algoritmo estudado, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

6. Considere o seguinte autómato finito não determinista $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ tal que

- $Q = \{p, q, r\}$,
- $I = \{x, y, z\}$
- $\delta(p, y) = \delta(p, z) = \delta(q, x) = \{p\}$,
  $\delta(r, z) = \{q\}$,
  $\delta(r, y) = \{r\}$,
  $\delta(p, x) = \delta(q, z) = \{q, r\}$,
  $\delta(q, y) = \delta(r, x) = \emptyset$,
- $q_0 = p$
- $F = \{r\}$.

(a) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato A:

- xy
- zx
- xxz
- yxy
- $zyxx$
- $xzxx$

(b) Usando o algoritmo estudado, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

7. Considere o seguinte autómato finito não determinista $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ tal que

- $Q = \{p, q, r\}$,
- $I = \{0, 1, 2\}$
- $\delta(r, 2) = \{p\}$,
  $\delta(r, 0) = \delta(r, 1) = \{q\}$,
  $\delta(q, 1) = \{r\}$,
  $\delta(p, 0) = \{p, r\}$,
  $\delta(q, 2) = \{q, r\}$,
  $\delta(p, 1) = \delta(p, 2) = \delta(q, 0) = \emptyset$,
- $q_0 = p$
- $F = \{q\}$.

(a) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato A:

- 10
- 02
- 010
- 002
- 2102
- 0201

(b) Usando o algoritmo estudado, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

8. Considere o seguinte autómato finito não determinista $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ tal que

- $Q = \{p, q, r, s\}$,
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(p, 0) = \{p, q\}$
  $\delta(p, 1) = \{p\}$
  $\delta(q, 0) = \delta(q, 1) = \{r\}$
  $\delta(r, 0) = \delta(s, 0) = \delta(s, 1) = \{s\}$
  $\delta(r, 1) = \emptyset$,
- $q_0 = p$
- $F = \{s\}$.

(a) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato A:

- 000
- 010
- 1101

(b) Usando o algoritmo estudado, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

9. Considere o seguinte autómato finito não determinista $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ tal que

- $Q = \{p, q, r, s\}$,
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(p, 0) = \{q, s\}$
  $\delta(q, 1) = \{q, r\}$
  $\delta(r, 1) = \delta(s, 1) = \{p\}$
  $\delta(p, 1) = \{q\}$
  $\delta(q, 0) = \{r\}$
  $\delta(r, 0) = \{s\}$
  $\delta(s, 0) = \emptyset$,
- $q_0 = p$
- $F = \{q, s\}$.

Usando o algoritmo estudado, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

10. Seja L a linguagem constituída pelas palavras sobre $\{0, 1, 2\}$ do tipo $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ onde $\alpha_1 \in \{0\}^*$, $\alpha_2 \in \{1\}^+$, $\alpha_3 \in \{2\}^*$ e tal que se α_1 é ϵ então α_2 é 1.

    (a) Defina um autómato finito não determinista A, com três estados, tal que $L_A = L$.

    (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato A:

    - 001
    - 00
    - 0011
    - 121

    (c) Usando o algoritmo estudado, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

11. Seja L a linguagem constituída pelas palavras sobre $\{a, b, c\}$ do tipo $\alpha\beta$ onde α é uma sequência não vazia e $\beta \in \{a\}^+$ ou $\beta \in \{b\}^+$.

    (a) Defina um autómato finito não determinista A, com três estados, tal que $L_A = L$.

    (b) Usando o algoritmo estudado, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

2 Gramáticas

1. Considere a gramática regular $G = (V, I, P, S)$
   $V = \{S, B, C, D\}$
   $I = \{0, 1\}$
   $P = \{(S, 0B), (S, 1C), (S, 0C), (B, 0S), (B, 1D), (B, 1B), (C, 1S), (C, 0D), (B, \varepsilon), (C, \varepsilon), (D, 0C), (D, 1B)\}$

   Apresente uma demonstração para as frases:

   (a) 0111

   (b) 1101

   (c) 01110

   (d) 10011

2. Considere a gramática regular $G = (V, I, P, S)$ tal que
   $V = \{A, B, C, D\}$ $I = \{x, y, z\}$
   $P = \{(A, xB), (A, xC), (A, x), (B, yB), (B, yA), (C, xD), (D, zD), (D, zA)\}$
   $S = A$

   Encontre uma demonstração para as frases:

(a) xyxyx
(b) xxzzx
(c) xyxxzx
(d) xxzxyx

3. Considere a gramática livre de contexto $G = (V, I, P, S)$ tal que
$V = \{S, A, B\}$ $I = \{0, 1\}$
$P = \{(S, \epsilon), (S, A), (S, B), (A, 0A1), (A, \epsilon), (B, 1B0), (B, \epsilon)\}$

   Encontre uma demonstração para as frases:

   (a) 0011
   (b) 1100
   (c) 00001111
   (d) xxzxyx

4. Seja L a linguagem constituída pelas sequências formadas por elementos de $\{x, ., c\}$ que têm $.c$ no fim.

   (a) Defina uma gramática regular G tal que $L_G = L$.
   (b) Apresente uma demonstração para a frase xxx.c no âmbito da gramática G definida na alínea anterior.

5. Seja L a linguagem constituída pelas sequências formadas por elementos de $\{x, ., c\}$ do tipo $\alpha.c$ onde α é uma sequência não vazia de elementos do conjunto $\{x, c\}$.

   (a) Defina uma gramática regular G tal que $L_G = L$. Discuta como a partir desta gramática pode construir uma outra gramática regular que apenas aceite as sequências do tipo $\beta.c$ onde β é uma sequência não vazia de letras do alfabeto português.
   (b) Apresente uma demonstração para a frase xccx.c no âmbito da gramática G definida na alínea anterior.

6. Defina gramáticas regulares que gerem exactamente:

   (a) sequências de 0's e 1's que comecem em 11;
   (b) sequências de 0's e 1's que terminem em 00;
   (c) sequências de 0's e 1's que comecem e terminem em 1;
   (d) sequência de 0's e 1's que comecem em 0 ou terminem em 1;
   (e) sequências de 0's e 1's que têm 1 na penúltima posição;
   (f) sequências de 0's e 1's que têm 1 na antepenúltima posição;
   (g) sequências de 0's e 1's do tipo w_1w_2 onde $w_1 \in \{0\}^*$, $w_2 \in \{1\}^*$, w_1 tem comprimento par e w_2 tem comprimento ímpar;
   (h) sequências de 0's e 1's que têm um número par de 1's;

(i) sequências de 0's e 1's que têm um número par de 1's e um número ímpar de 0's;

(j) sequências de 0's e 1's tais que entre quaisquer dois 1's consecutivos existam exactamente dois 0's;

(k) as sequências de 0's, 1's e 2's cuja soma de dois dígitos consecutivos seja inferior ou igual a 2;

(l) as sequências de 0's e 1's que têm pelo menos dois 1's;

(m) as sequências de 0's e 1's que contêm a sequência 010;

(n) as sequências de 0's e 1's que não contêm a sequência 110;

(o) as sequências de 0's e 1's que começam em 0 e têm comprimento par;

(p) as sequências de 0's e 1's que começam em 1 e têm comprimento ímpar;

(q) as sequências de 0's e 1's que são distintas de 11 e de 111;

(r) as sequências de 0's e 1's não vazias e que têm 1 em cada posição ímpar;

(s) as sequências de 0's e 1's que têm pelo menos dois 0's e no máximo um 1;

(t) as sequências de 0's e 1's que têm um número par 0's ou exactamente dois 1's;

(u) as sequências de elementos de $\{a, ..., z, 0, ..., 9\}$ que começam por uma letra (i.e., as sequências que são, frequentemente, utilizadas como identificadores em linguagens de programação);

(v) as sequências de a's e b's cujo comprimento seja múltiplo de 4;

(w) as sequências de a's, b's e c's que contêm exactamente um c e antes do c, não contêm duas letras consecutivas iguais;

(x) as sequências de a's, b's e c's que verificam pelo menos uma das seguintes condições: (i) têm comprimento 1; (ii) começam em ac e terminam em b.

7. Considere a linguagem L constituída pelas sequências de elementos do conjunto $\{x, ., @\}$ do tipo $\alpha_1 @ \alpha_2$ onde $\alpha_1 \in \{x\}^*$ é uma sequência não vazia e $\alpha_2 \in \{x, .\}^*$ é uma sequência que começa e termina em x, tem pelo menos um . e não contém dois .'s consecutivos.

   (a) Defina uma gramática regular tal que $L_G = L$. Discuta como a partir desta gramática pode construir uma gramática regular que apenas aceite as sequências do tipo $\beta_1 @ \beta_2$ onde β_1 é uma sequência não vazia de letras do alfabeto português e β_2 é uma sequência de letras do alfabeto português e . que começa e termina com uma letra, tem pelo menos um . e não contém dois .'s consecutivos.

   (b) Mostre que as seguintes sequências fazem parte da linguagem gerada pela gramática G:

   - xx@x
   - xxx@x.xx.x.

8. Uma constante numérica é constituída por uma parte inteira (sequência de dígitos de 0 a 9) e por uma parte decimal (sequência de dígitos de 0 a 9) separadas por . que pode ser omitido no caso da parte decimal ser vazia. A parte inteira e a parte decimal não podem ser ambas vazias.

(a) Defina uma gramática regular G_1 que gere exactamente as sequências do tipo $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica com parte decimal não vazia.

(b) Defina uma gramática regular G_2 que gere exactamente as sequências do tipo w, $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica.

(c) Mostre que as seguintes sequências fazem parte da linguagem gerada por G_1:

- -1.5
- +.41

(d) Mostre que as seguintes sequências fazem parte da linguagem gerada por G_2:

- .35
- -1.5
- +.41
- -2.

9. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ cujo comprimento é um número ímpar e cujo símbolo do meio é um 0.

   (a) Construa uma gramática *livre de contexto* que gere exactamente estas sequências.

   (b) Apresente uma demonstração para as frases:

   - 11010
   - 1010010

10. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que são palíndromos ("capicuas").

    (a) Construa uma gramática *livre de contexto* que gere exactamente estas sequências.

    (b) Apresente uma demonstração para as frases:

    - 2112
    - 012210

11. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{0, ..., 9, +, \times, (,)\}$ que representam expressões aritméticas sobre naturais (um natural é uma sequência não vazia de dígitos w tal que se $|w| > 1$ então w não começa por 0) com as convenções usuais tendo as operações de soma e multiplicação notação infixa.

    (a) Construa uma gramática *livre de contexto* que gere exactamente estas sequências.

    (b) Apresente uma demonstração para as frases

    - $(12 + 3) \times 25$
    - $123 + 10 \times 7$

12. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{a, \ldots, z, 0, ..., 9, +, \times, (,)\}$ que representam expressões aritméticas sobre naturais e identificadores (um identificador é uma sequência não vazia de elementos de $\{a, \ldots, z, 0, ..., 9\}$ que começa por uma letra) com as convenções usuais.

    (a) Construa uma gramática *livre de contexto* que gere exactamente estas sequências.

    (b) Apresente uma demonstração para as frases

- $x \times 122 + y$
- $(z0 + (35 + z1)) \times 24$

13. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{T, F, and, or, not, (,)\}$ que representam expressões booleanas sobre as constantes T e F com as convenções usuais sendo *and* e *or* operadores infixos e *not* operador prefixo e *not*.

    (a) Construa uma gramática *livre de contexto* que gere exactamente estas sequências.

    (b) Apresente uma demonstração para as frases

    - $T\, and\, not\, F$
    - $not(T\ or\ F) and\, T$

14. Considere uma linguagem de programação simples que tenha comandos de atribuição do tipo *idvar* `:=` *exp* (onde *idvar* representa um identificador de uma variável e *exp* uma expressão), comandos de composição sequencial do tipo `[`C_1`;`...`;`C_n`]` (onde cada C_i representa um comando), comandos condicionais do tipo `if then` e `if then else` e comandos iterativos do tipo `while do` e `repeat until` cuja sintaxe é a habitual nas linguagens de programação imperativas usuais (e.g C).

    (a) Construa uma gramática *livre de contexto* que descreva o fragmento da linguagem relativo à sintaxe dos comandos. (Sugestão: como símbolos não terminais inclua, entre outros, os símbolos *Stm*, *Loopstm*, *Expression*, *Idvar*, *Condition*; como símbolos terminais inclua, entre outros, os símbolos `if`, `then`, `while`).

    (b) Apresente uma demonstração para as frases

    - `while` *Condition* `do` *Idvar* `:=` *Expression*
    - `if` *Condition* `then` `[`*Idvar* `:=` *Expression*`;`*Idvar* `:=` *Expression*`]`

3 Expressões regulares

1. Considere as seguintes expressões regulares sobre $\{0, 1\}$

   - $0^* + 1^*$
   - 0^*1^*
   - $(00)^*1(11)^*$
   - $0(10)^*1$
   - $(111)^*$
   - $0(10 + 01)^*1$
   - $01^*(0 + \varepsilon)$
   - $0^*10^* + 0^*$
   - $0(10)^* + 1(01)^*$
   - $(0 + 1)^*1(0 + 1)^*$
   - $0^*1(0 + 1)^*$

- $(0+1)^*00(0+1)^*$
- $(01+1)^*00(0+1)^*$
- $(0+01+11)(0+1)^*$
- $(0+1)^*1(0+1)^*1(0+1)^*0$

(a) Para cada uma das expressões acima indique três sequências que pertençam à linguagem denotada pela expressão e três sequências que não pertençam à linguagem denotada pela expressão.

(b) Para cada uma das expressões acima descreva a linguagem denotada pela expressão.

2. Seja L a linguagem constituída pelas sequências formadas por elementos de $\{x, ., c\}$ que têm $.c$ no fim. Encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$. Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências formadas por elementos do alfabeto português que têm $.c$ no fim.

3. Seja L a linguagem constituída pelas sequências formadas por elementos de $\{a, ..., z, 0, ..., 9\}$ que começam por uma letra. Encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$.

4. Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das

   (a) sequências de 0's e 1's que comecem em 11;
   (b) sequências de 0's e 1's que terminem em 00;
   (c) sequências de 0's e 1's que comecem e terminem em 1;
   (d) sequência de 0's e 1's que comecem em 0 ou terminem em 1;
   (e) sequências de 0's e 1's que têm 1 na penúltima posição;
   (f) sequências de 0's e 1's que têm 1 na antepenúltima posição;
   (g) sequências de 0's e 1's do tipo w_1w_2 onde $w_1 \in \{0\}^*$, $w_2 \in \{1\}^*$, w_1 tem comprimento par e w_2 tem comprimento ímpar;
   (h) sequências de 0's e 1's que têm um número par de 1's;
   (i) sequências de 0's e 1's que têm um número par de 1's e um número ímpar de 0's;
   (j) sequências de 0's e 1's tais que entre quaisquer dois 1's consecutivos existam exactamente dois 0's;
   (k) as sequências de 0's, 1's e 2's cuja soma de dois dígitos consecutivos seja inferior ou igual a 2;
   (l) as sequências de 0's e 1's que têm pelo menos dois 1's;
   (m) as sequências de 0's e 1's que contêm a sequência 010;
   (n) as sequências de 0's e 1's que não contêm a sequência 110;
   (o) as sequências de 0's e 1's que começam em 0 e têm comprimento par;
   (p) as sequências de 0's e 1's que começam em 1 e têm comprimento ímpar;
   (q) as sequências de 0's e 1's que são distintas de 11 e de 111;

(r) as sequências de 0's e 1's não vazias e que têm 1 em cada posição ímpar;

(s) as sequências de 0's e 1's que têm pelo menos dois 0's e no máximo um 1;

(t) as sequências de 0's e 1's que têm um número par 0's ou exactamente dois 1's;

(u) as sequências de elementos de $\{a, ..., z, 0, ..., 9\}$ que começam por uma letra (i.e., as sequências que são, frequentemente, utilizadas como identificadores em linguagens de programação);

(v) as sequências de a's e b's cujo comprimento seja múltiplo de 4;

(w) as sequências de a's, b's e c's que contêm exactamente um c e antes do c, não contêm duas letras consecutivas iguais;

(x) as sequências de a's, b's e c's que verificam pelo menos uma das seguintes condições: (i) têm comprimento 1; (ii) começam em ac e terminam em b.

5. Considere a linguagem L constituída pelas sequências de elementos do conjunto $\{x, ., @\}$ do tipo $\alpha_1 @ \alpha_2$ onde $\alpha_1 \in \{x\}^*$ é uma sequência não vazia e $\alpha_2 \in \{x, .\}^*$ é uma sequência que começa e termina em x, tem pelo menos um . e não contém dois .'s consecutivos. Encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$.

   Refaça o exercício considerando agora que as sequências podem conter não só x como também qualquer letra do alfabeto português.

6. Uma constante numérica é constituída por uma parte inteira (sequência de dígitos de 0 a 9) e por uma parte decimal (sequência de dígitos de 0 a 9) separadas por . que pode ser omitido no caso da parte decimal ser vazia. A parte inteira e a parte decimal não podem ser ambas vazias.

   (a) Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências do tipo $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica com parte decimal não vazia.

   (b) Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências do tipo w, $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica.

7. Indique uma expressão regular que denote cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{xy : x \in \{11, 0\}^* \wedge y \in \{00, 1\}^*\}$

   (b) $\{01x : x \in \{01\}^*\} \cup \{0x : x \in \{01\}^*\}$

   (c) $\{0x1y : x, y \in \{0\}^* \cup \{1\}^*\}$

   (d) $\{xyz : x, y, z \in \{0, 1\} \wedge x + y + z \leq 2\}$

8. Verifique que

   (a) $\alpha\emptyset = \emptyset$

   (b) $\emptyset^* = \epsilon$

   (c) $\alpha\epsilon = \alpha$

   (d) $\epsilon^* = \epsilon$

   (e) $\alpha^* + \epsilon = \alpha^*$

   (f) $\alpha^* + \alpha^+ = \alpha^*$ (sendo α^+ uma abreviatura de $\alpha\alpha^*$)

(g) $\alpha^*\alpha = \alpha\alpha^*$

(h) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(i) $(\alpha^*)^* = \alpha^*$

9. Simplifique as seguintes expressões regulares:

(a) $b(aa^* + \epsilon)^* + bba^*$

(b) $(ab^* + (a + b)b^*)(b + \varepsilon)$

(c) $(aa^*a + caa) + (a^*b + cb)$

(d) $(b(b + \emptyset^*) + \emptyset^*)^*ca + b(b^*c + bb^*a)$

(e) $(ab + a)b^*(a(a + b)^* + b(b + a)^*)^*$

10. Sendo $I = \{0, 1\}$, verifique se, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in R_I$,

(a) $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$

(b) $(\alpha + \beta)^*\beta = (\alpha^*\beta)^*$

(c) $\alpha^*\beta = \beta\alpha^*$

(d) $(\alpha\beta + \alpha)^*\alpha\beta = (\alpha\alpha^*\beta)^*$

(e) $(\alpha\beta + \alpha)^*\alpha = \alpha(\beta\alpha + \alpha)^*$

(f) $\alpha^* + \beta\beta^* = \alpha\alpha^* + \beta^*$

4 Algoritmos de conversão entre autómatos finitos, gramáticas regulares e expressões regulares

1. Considere a gramática regular $G = (V, I, P, S)$ em que $V = \{S, A\}$, $I = \{0, 1\}$ e $P = \{(S, 0A), (S, 1), (A, 1A), (A, \varepsilon)\}$

(a) Indique uma expressão regular α que denote a linguagem gerada por G.

(b) Indique uma expressão regular α' que denote a linguagem gerada pela gramática $G' = (V, I, P \backslash \{(A, \varepsilon)\}, S)$.

(c) Defina um autómato finito não determinista A que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

(d) Defina um autómato finito determinista A' que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

2. Considere a gramática regular $G = (V, I, P, S)$ em que $V = \{S, A\}$, $I = \{0, 1\}$ e $P = \{(S, 0A), (A, 1A), (A, 0A), (A, 1)\}$

(a) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

(b) Defina um autómato finito não determinista A que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

3. Considere a gramática regular $G = (V, I, P, S)$ em que $V = \{S, A, B, C\}$, $I = \{0, 1\}$ e $P = \{(S, 0A), (S, 1B), (S, \varepsilon), (A, 1C), (C, 0A), (C, \varepsilon), (B, 1B), (B, \varepsilon)\}$

(a) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

(b) Defina um autómato finito não determinista A que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

(c) Defina um autómato finito determinista A' que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

4. Recorde a gramática, já definida num exercício anterior, que gera exactamente as sequências de 0's e 1's tais que entre quaisquer dois 1's consecutivos existam exactamente dois 0's

   (a) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

   (b) Defina um autómato finito não determinista A que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

5. Considere a gramática regular $G = (V, I, P, S)$ em que $V = \{S, U, D\}$, $I = \{0, 1, 2\}$ e $P = \{(S, 0S), (S, 1U), (S, \varepsilon), (S, 2D), (U, 0S), (U, 1U), (U, \varepsilon), (D, 0S), (D, \varepsilon)\}$

   (a) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

   (b) Defina um autómato finito não determinista A que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

   (c) Defina um autómato finito determinista A' que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

6. Considere a gramática regular $G = (V, I, P, S)$ em que $V = \{A, B, C, D\}$, $I = \{x, y, z\}$, $P = \{(A, xB), (A, xC), (A, x), (B, yB), (B, yA), (C, xD), (D, zD), (D, zA)\}$ e $S = A$

   (a) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

   (b) Defina um autómato finito não determinista A que aceite exactamente todas as frases geradas por G.

7. Encontre para cada um dos autómatos definidos a seguir uma gramática regular G tal que $L_G = L_D$:

   (a) $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com $Q = \{s, t, u, v\}$, $I = \{0, 1\}$, $q_0 = s$, $F = \{v\}$ e
      - $\delta(s, 0) = v$, $\delta(s, 1) = t$
      - $\delta(t, 0) = u$, $\delta(t, 1) = v$
      - $\delta(u, 1) = t$.

   (b) $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com $Q = \{a, b, c, d\}$, $I = \{0, 1\}$, $q_0 = a$, $F = \{d\}$ e
      - $\delta(a, 0) = a$, $\delta(a, 1) = b$
      - $\delta(b, 0) = c$, $\delta(b, 1) = b$
      - $\delta(c, 0) = a$, $\delta(c, 1) = d$
      - $\delta(d, 0) = c$, $\delta(d, 1) = b$.

   (c) $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com $Q = \{p, q, r\}$, $I = \{0, 1\}$, $q_0 = p$, $F = \{q, r\}$ e
      - $\delta(p, 0) = q$, $\delta(p, 1) = r$

- $\delta(q, 0) = p$, $\delta(q, 1) = r$
- $\delta(r, 0) = q$, $\delta(r, 1) = q$.

8. Encontre para cada um dos autómatos definidos a seguir uma gramática regular G tal que $L_G = L_A$:

   (a) $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com $Q = \{p, q, r\}$, $I = \{0, 1, 2\}$, $q_0 = p$ $F = \{q\}$ e
   - $\delta(r, 2) = \{p\}$
   - $\delta(r, 0) = \delta(r, 1) = \{q\}$
   - $\delta(q, 1) = \{r\}$
   - $\delta(p, 0) = \{p, r\}$
   - $\delta(q, 2) = \{q, r\}$
   - $\delta(p, 1) = \delta(p, 2) = \delta(q, 0) = \emptyset$.

   (b) $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com $Q = \{p, q, r, s\}$, $I = \{0, 1\}$, $q_0 = p$, $F = \{s\}$ e
   - $\delta(p, 0) = \{p, q\}$
   - $\delta(p, 1) = \{p\}$
   - $\delta(q, 0) = \delta(q, 1) = \{r\}$
   - $\delta(r, 0) = \delta(s, 0) = \delta(s, 1) = \{s\}$
   - $\delta(r, 1) = \emptyset$.

   (c) $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com $Q = \{p, q, r, s\}$, $I = \{0, 1\}$, $q_0 = p$, $F = \{q, s\}$ e
   - $\delta(p, 0) = \{q, s\}$
   - $\delta(q, 1) = \{q, r\}$
   - $\delta(r, 1) = \delta(s, 1) = \{p\}$
   - $\delta(p, 1) = \{q\}$
   - $\delta(q, 0) = \{r\}$
   - $\delta(r, 0) = \{s\}$
   - $\delta(s, 0) = \emptyset$.

9. Recorde o autómato finito determinista D, já definido anteriormente, que reconhece exactamente o conjunto das sequências de a's e b's que entre dois a's consecutivos tenham no máximo um b

   (a) Encontre uma gramática regular G tal que $L_G = L_D$.

   (b) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

10. Recorde o autómato finito determinista D, já definido anteriormente, cuja linguagem é o conjunto das sequências de a's e b's que verifiquem pelo menos um dos seguintes requisitos: (i) contêm dois a's consecutivos, (ii) contêm dois b's consecutivos.

    (a) Encontre uma gramática regular G tal que $L_G = L_D$.

    (b) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

11. Recorde o autómato finito determinista D, já definido anteriormente, cuja linguagem é o conjunto das sequências de 0's e 1's com um número par de 0's e um número ímpar de 1's.

(a) Encontre uma gramática regular G tal que $L_G = L_D$.

(b) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

12. (a) Defina um autómato finito determinista que aceite todas as sequências de $\{0, 1, 2\}$ cujo somatório seja divisível por três.

    (b) Usando o algoritmo estudado, encontre uma gramática regular G que gere a linguagem do autómato anterior.

13. Recorde o autómato finito não determinista A, já definido anteriormente, cuja linguagem é o conjunto das sequências não vazias de a's, b's e c's nas quais o último símbolo ocorre pelo menos duas vezes em toda a sequência.

    (a) Encontre uma gramática regular G tal que $L_G = L_A$.

    (b) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

14. Recorde o autómato finito não determinista A, já definido anteriormente, cuja linguagem é o conjunto das sequências não vazias de a's, b's e c's nas quais o último símbolo ocorre uma única vez em toda a sequência.

    (a) Encontre uma gramática regular G tal que $L_G = L_A$.

    (b) Indique uma expressão regular que denote a linguagem gerada por G.

15. (a) Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências de 0's e 1's que contêm a sequência 110.

    (b) Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências de 0's e 1's que não contêm a sequência 110. Se achar conveniente pode usar alguns dos algoritmos estudados relativos à construção de gramáticas a partir de autómatos e à construção de expressões regulares a partir de gramáticas.

16. Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências de 0's e 1's que distintas de 11 e de 111. Se achar conveniente pode usar alguns dos algoritmos estudados relativos à construção de gramáticas a partir de autómatos e à construção de expressões regulares a partir de autómatos.

17. Dado o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

    tal que $\delta(q_0, 1) = \{q_1\}$, $\delta(q_1, 0) = \{q_2\}$ e $\delta(q_2, \epsilon) = \{q_0\}$ construa um autómato finito não determinista sem movimentos ϵ que reconheça exactamente a linguagem reconhecida por A.

18. Dado o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, 2\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

    tal que

    - $\delta(q_0, 0) = \{q_0\}$, $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_1\}$,
    - $\delta(q_1, 1) = \{q_1\}$,$\delta(q_1, \epsilon) = \{q_2\}$,

- $\delta(q_2, 2) = \{q_2\}$

construa um autómato finito não determinista sem movimentos ϵ que reconheça exactamente a linguagem reconhecida por A.

19. Dado o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0, 1, a, b\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

tal que

- $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_1, q_2\}$,
- $\delta(q_1, 1) = \{q_1\}$, $\delta(q_1, 0) = \{q_3\}$,
- $\delta(q_2, b) = \{q_2\}$, $\delta(q_2, a) = \{q_4\}$,
- $\delta(q_3, \epsilon) = \{q_5\}$,
- $\delta(q_4, \epsilon) = \{q_5\}$

construa um autómato finito não determinista sem movimentos ϵ que reconheça exactamente a linguagem reconhecida por A.

20. Seja $S = \{x0y : x, y \in \{0, 1\}^*\}$.

    (a) Defina um autómato finito não determinista A em que $L_A = S$.

    (b) A partir de A, encontre um autómato finito determista D tal que $L_D = L_A$.

    (c) A partir do autómato D defina uma gramática regular G tal que $L_G = L_D$.

    (d) Defina uma expressão regular α a partir da gramática G que denote a linguagem gerada por G.

    (e) A partir de α encontre um autómato finito não determinista A tal que $L_A = L(\alpha)$.

21. Usando o algoritmo estudado, encontre a partir de cada uma das seguintes expressões regulares um autómato finito não determinista que reconheça precisamente a linguagem por ela denotada:

    (a) $01^* + 1$

    (b) $0(1 + 0)^*$

    (c) $(01)^* + 1^*$

    (d) $(11)^* + (10)^*$

    (e) $(101)^* + (00)^*$

    (f) $10(10)^*$

    (g) $0^* + a^*$

    (h) $1^*0 + b^*a$

    (i) $(aa)^* + (10)^* + (xx)^*$

22. Sejam

- L_1 o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm no mínimo dois 0s;
- L_2 o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm no máximo um 1;
- L_3 o conjunto das sequências de 0's e 1's que contêm a sequência 010;
- L_4 o conjunto das sequências de 0's e 1's que contêm um número par de 0's;
- L_5 o conjunto das sequências de 0's e 1's que começam em 0 e terminam em 1.

Usando as técnicas aprendidas no contexto do algoritmo que permite construir um autómato finito não determinista com movimentos ϵ a partir de uma expressão regular, encontre autómatos finitos não deterministas com movimentos ϵ que reconheçam exactamente as seguintes linguagens

(a) $L_1 \cup L_2$
(b) $L_3 \cup L_4$
(c) $L_4 \cup L_5$
(d) $L_1 L_2$
(e) $L_2 L_1$
(f) $L_3 L_4$
(g) $L_4 L_5$
(h) L_1^*
(i) L_2^*
(j) L_3^*
(k) L_4^*
(l) L_5^*
(m) $(L_1 \cup L_2)^*$
(n) $(L_2 L_1)^*$

23. Usando o algoritmo estudado, encontre a partir de cada uma das seguintes expressões regulares uma gramática regular que gere precisamente a linguagem por ela denotada:

(a) $01^* + 1$
(b) $0(1+0)^*$
(c) $(01)^* + 1^*$
(d) $(11)^* + (10)^*$
(e) $(101)^* + (00)^*$
(f) $(01)^*11$
(g) $(0+1)^*1(0+1)^*$

24. Sendo $I = \{0, 1\}$, verifique se, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in R_I$,

(a) $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$
(b) $(\alpha + \beta)^* \beta = (\alpha^* \beta)^*$

25. Seja $S = \{x0y : x, y \in \{0,1\}^*\}$.

    (a) Defina uma gramática regular G tal que $L_G = S$.

    (b) A partir de G, encontre um autómato não determinista A tal que $L_G = L_A$.

    (c) Defina uma expressão regular α a partir da gramática G que denote a linguagem gerada por G.

26. Seja $S = \{xy : x \in \{1\}^* \text{ e } y \in \{0,1\}\}$.

    (a) Defina um autómato não determinista A tal que $L_A = S$.

    (b) A partir de A, encontre um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

    (c) A partir de D defina uma gramática regular G tal que $L_G = L_D$.

    (d) Defina uma expressão regular α a partir da gramática G que denote a linguagem gerada por G.

27. Seja $S = \{xy : x \in \{a\}^* \text{ e } y \in \{bc\}^*\}$.

    (a) Defina uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = S$.

    (b) A partir de α, defina uma gramática regular G tal que $L_G = L_\alpha$

    (c) A partir de G encontre um autómato finito não determinista A tal que $L_A = L_G$.

28. Seja L a linguagem constituída pelas sequências formadas por elementos de $\{x, ., c\}$ que têm $.c$ no fim.

    (a) Recorde a gramática regular G para esta linguagem que definiu num exercício anterior.

        i. A partir de G encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$.

        ii. A partir de G encontre um autómato finito determista que reconheça exactamente a linguagem L.

    (b) Recorde o autómato finito determista D para esta linguagem que definiu num exercício anterior. A partir de D encontre uma gramática G que gere exactamente L.

    (c) Recorde a expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$ que definiu num exercício anterior.

        i. A partir de α encontre um autómato finito não determinista A que reconheça exactamente a linguagem L.

        ii. A partir de α encontre uma gramática regular G que reconheça exactamente a linguagem L.

29. Considere a linguagem L constituída pelas sequências de elementos do conjunto $\{x, ., @\}$ do tipo $\alpha_1 @ \alpha_2$ onde $\alpha_1 \in \{x\}^*$ é uma sequência não vazia e $\alpha_2 \in \{x, .\}^*$ é uma sequência que começa e termina em x, tem pelo menos um . e não contém dois .'s consecutivos.

    (a) Recorde a gramática regular G para esta linguagem que definiu num exercício anterior.

i. A partir de G encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$.

ii. A partir de G encontre um autómato finito determinista que reconheça exactamente a linguagem L.

(b) Recorde o autómato finito determinista D para esta linguagem que definiu num exercício anterior. A partir de D encontre uma gramática G que gere exactamente L.

(c) Recorde a expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$ que definiu num exercício anterior.

i. A partir de α encontre um autómato finito não determinista A que reconheça exactamente a linguagem L.

ii. A partir de α encontre uma gramática regular G que reconheça exactamente a linguagem L.

30. Seja L a linguagem constituída pelo conjunto das sequências do tipo $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica (como descrita num exercício anterior) com parte decimal não vazia.

(a) Recorde a gramática regular G_1 para esta linguagem que definiu num exercício anterior.

i. A partir de G_1 encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$.

ii. A partir de G_1 encontre um autómato finito não determinista que reconheça exactamente a linguagem L.

(b) Recorde o autómato finito determista D_1 para esta linguagem que definiu num exercício anterior. A partir de D_1 encontre uma gramática G que gere exactamente L.

(c) Recorde a expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$ que definiu num exercício anterior.

i. A partir de α encontre um autómato finito não determinista A que reconheça exactamente a linguagem L.

ii. A partir de α encontre uma gramática regular G que reconheça exactamente a linguagem L.

31. Seja L a linguagem constituída pelo conjunto das sequências do tipo w, $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica (como descrita num exercício anterior).

(a) Recorde a gramática regular G_2 para esta linguagem que definiu num exercício anterior.

i. A partir de G_2 encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$.

ii. A partir de G_2 encontre um autómato finito não determinista que reconheça exactamente a linguagem L.

(b) Recorde o autómato finito determista D_2 para esta linguagem que definiu num exercício anterior. A partir de D_2 encontre uma gramática G que gere exactamente L.

(c) Recorde a expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$ que definiu num exercício anterior.

   i. A partir de α encontre um autómato finito não determinista A que reconheça exactamente a linguagem L.

   ii. A partir de α encontre uma gramática regular G que reconheça exactamente a linguagem L.

32. Num exercício anterior construiu uma gramática *livre de contexto* que gerava exactamente as sequências sobre o alfabeto $\{0, ..., 9, +, \times, (,)\}$ que representam expressões aritméticas sobre naturais com as convenções usuais.

    Será que existe alguma gramática regular que gere exctamente a linguagem acima referida? Justifique devidamente a sua resposta. (Sugestão: recorra ao lema da bombagem).

33. Num exercício anterior construiu uma gramática *livre de contexto* que gerava exactamente as sequências sobre o alfabeto $\{T, F, and, or, not, (,)\}$ que representam expressões booleanas sobre as constantes T e F com as convenções usuais.

    Será que existe alguma gramática regular que gere exctamente a linguagem acima referida? Justifique devidamente a sua resposta. (Sugestão: recorra ao lema da bombagem).