Autómtatos finitos não deterministas vs autómatos finitos deterministas

PROPOSIÇÃO: *Seja* $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ *um autómato finito determinista. Existe um autómato finito não determinista* A *tal que* $L_A = L_D$.

Prova: A prova desta proposição é trivial.

(i) Proposta de autómato finito não determinista A:

$$A = (Q_A, I, \delta_A, q_0^A, F_A)$$

onde

- $Q_A = Q$
- $\delta_A : Q_A \times I \to 2^{Q_A}$ é tal que
  - $\delta_A(q, i) = \{\delta(q, i)\}$ se $\delta(q, i)$ está definido
  - $\delta_A(q, i) = \emptyset$ se $\delta(q, i)$ não está definido
- $q_0^A = q_0$
- $F_A = F$.

(ii) Haveria agora que provar que $L_A = L_D$.

PROPOSIÇÃO: *Seja $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ um autómato finito não determinista. Existe um autómato finito determinista D tal que $L_A = L_D$.*

Prova:

(i) Proposta de autómato finito determinista D:

$$D = (Q_D, I, \delta_D, q_0^D, F_D)$$

onde

- $Q_D = 2^Q$
- $\delta_D : Q_D \times I \to Q_D$ é tal que $\delta_D(q_D, i) = \bigcup_{q \in q_D} \delta(q, i)$
- $q_0^D = \{q_0\}$
- $F_D = \{q_D \in Q_D : q_D \cap F \neq \emptyset\}$.

(ii) Prova de que $L_A = L_D$ (ESTA PROVA NÃO FOI DADA NAS AULAS).

(ii.a) Prova-se em primeiro lugar que para cada $x \in I^*$

$$\delta^*(q_0, x) = \delta_D^*(q_0^D, x)$$

ou seja, informalmente, que o conjunto de estados que se atinge quando em A se recebe a sequência x a partir do estado inicial q_0 é o estado de D (note-se que um estado de D é um conjunto de estados de A) que se atinge quando se recebe x a partir do estado inicial q_0^D.

A prova decorre por *indução* no comprimento (número de símbolos) das sequências. Isto significa que:

(a) prova-se em primeiro lugar que a igualdade é verdadeira para a sequência de menor comprimento (a sequência ϵ que tem comprimento 0) e

(b) prova-se seguidamente que se a asserção é verdadeira para sequências de comprimento n, $n \geq 0$, (esta hipótese constitui a chamada *hipótese de indução*) então a asserção é verdadeira para sequências de comprimento $n + 1$.

A prova descrita em (a) constitui a chamada *base* da indução e a prova descrita em (b) constitui o chamado *passo* da indução.

Prova da base de indução: Há que provar que $\delta^*(q_0, \epsilon) = \delta_D^*(q_0^D, \epsilon)$. Por definição de aplicação de transição (A é a.f.n.d), $\delta^*(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$. Por definição de função de transição (D é a.f.d), $\delta_D^*(q_0^D, \epsilon) = q_0^D$. Pela definição de D, $q_0^D = \{q_0\}$ o que conclui a prova.

Prova do passo de indução: Há que provar que se $\delta^*(q_0, x) = \delta_D^*(q_0^D, x)$ com $x \in I^*$ (hipótese de indução) então $\delta^*(q_0, x.i) = \delta_D^*(q_0^D, x.i)$ com $i \in I$.

1. $\delta^*(q_0, x.i) = \bigcup_{q \in \delta^*(q_0, x)} \delta(q, i)$ (por definição de aplicação de transição)

2. $\delta^*(q_0, x) = \delta_D^*(q_0^D, x)$ (por hipótese de indução)

3. $\bigcup_{q \in \delta^*(q_0,x)} \delta(q,i) = \bigcup_{q \in \delta_D^*(q_0^D,x)} \delta(q,i)$ (por 2)

4. $\bigcup_{q \in \delta_D^*(q_0^D,x)} \delta(q,i) = \delta_D(\delta_D^*(q_0^D, x), i)$ (por definição de δ_D)

5. $\delta_D(\delta_D^*(q_0^D, x), i) = \delta_D^*(q_0^D, x.i)$ (por definição de função transição)

6. $\delta^*(q_0, x.i) = \delta_D^*(q_0^D, x.i)$ (por 1, 3, 4 e 5).

(ii.b) Prova-se agora que, para cada $x \in I^*$, $\delta^*(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$ sse $\delta_D^*(q_0^D, x) \in F_D$.

1. Se existe $q \in F$ tal que $q \in \delta^*(q_0, x)$ então, por (ii.a), $q \in \delta_D^*(q_0^D, x)$ o que significa que $\delta_D^*(q_0^D, x) \cap F \neq \emptyset$. Por definição de F_D, $\delta_D^*(q_0^D, x) \in F_D$. Isto prova que se $\delta^*(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$ então $\delta_D^*(q_0^D, x) \in F_D$.

2. A prova de que se $\delta_D^*(q_0^D, x) \in F_D$ então $\delta^*(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$ é semelhante.

(ii.c) Tem-se finalmente que, para cada $x \in I^*$, $x \in L_A$ sse $x \in L_D$ (ou seja, $L_A = L_D$) por (ii.b) e pelas definições de sequência aceite por autómato finito não determinista e de sequência aceite por autómato finito determinista.

EXEMPLO: Considere-se o autómato $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com

- $Q = \{q_0, q_1\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $F = \{q_1\}$
- $\delta : Q \times I \to 2^Q$ tal que

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$

De acordo com o algoritmo anterior, um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$ é $D = (Q', I, \delta', q_0', F')$ onde

- $Q' = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_0, q_1\}\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $q_0' = \{q_0\}$
- $F' = \{\{q_1\}, \{q_0, q_1\}\}$
- $\delta : Q' \times I \to Q'$ é tal que $\delta'(q', i) = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, i)$ para cada $q' \in Q'$ e $i \in I$ ou seja

δ	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

EXEMPLO: Considere-se o autómato $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $F = \{q_2\}$
- $\delta : Q \times I \to 2^Q$ tal que

δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

De acordo com o algoritmo anterior, um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$ é $D = (Q', I, \delta', q'_0, F')$ onde

- $Q' = 2^Q = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $q'_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{q' \in Q' : q' \cap F \neq \emptyset\} = \{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$
- $\delta' : Q' \times I \to Q'$ é tal que $\delta'(q', i) = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, i)$ para cada $q' \in Q'$ e $i \in I$ ou seja

δ'	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

EXEMPLO: Considere-se o autómato $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $I = \{0, 1, 2\}$

- $F = \{q_2\}$

- $\delta : Q \times I \to 2^Q$ tal que

δ	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

De acordo com o algoritmo anterior, um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$ é $D = (Q', I, \delta', q_0', F')$ onde

- $Q' = 2^Q = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$
- $I = \{0, 1, 2\}$
- $q_0' = \{q_0\}$
- $F' = \{q' \in Q' : q' \cap F \neq \emptyset\} = \{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$
- $\delta' : Q' \times I \to Q'$ é tal que $\delta'(q', i) = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, i)$ para cada $q' \in Q'$ e $i \in I$ ou seja

δ'	0	1	2
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$