PROPOSIÇÃO: *Dado um autómato finito não determinista com movimentos* ϵ*,* $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$*, existe um autómato finito não determinista sem movimentos* ϵ*,* A'*, tal que* $L_A = L_{A'}$*.*

Prova (esboço):
(i) Considera-se o autómato finito não determinista

$$A' = (Q, I, \delta', q_0, F')$$

tal que

- $\delta' : Q \times I \to 2^Q$ tal que, para cada $q \in Q$ e $i \in I$,

  $$\delta'(q, i) = \delta^*(q, i)$$

  ou seja,

  $$\delta'(q,i) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q,\epsilon)} \textit{fecho-}\epsilon(\delta(q',i)) = \bigcup_{q' \in \textit{fecho-}\epsilon(q)} \textit{fecho-}\epsilon(\delta(q',i))$$

- F' é

  - F se *fecho-*$\epsilon(q_0) \cap F = \emptyset$
  - $F \cup \{q_0\}$ se *fecho-*$\epsilon(q_0) \cap F \neq \emptyset$.

(ii) Haveria agora que provar que $L_A = L_{A'}$.

Observação:

- Dada a definição de δ', para calcular $\delta'(q, i)$

  (i) calcula-se o fecho-ϵ de q (informalmente, o conjunto dos estados que é possível "atingir" a partir de q sem ler nenhum símbolo de I)

  (ii) para cada estado q' que esteja no fecho-ϵ de q, calcula-se $\delta(q', i)$ (ou seja, o conjunto dos estados que é possível "atingir" a partir de q' lendo o símbolo i)

  (iii) calcula-se o fecho-ϵ de cada estado obtido em (ii).

  O conjunto dos estados assim obtidos constituem $\delta'(q, i)$.

- Relativamente aos estados finais de A': (i) os estados finais do novo autómato são exactamente os mesmos de A se, em A, a partir do estado inicial não é possível "atingir" um estado final sem ler um qualquer símbolo em I (i.e., A não aceita a sequência vazia) e (ii) os estados finais do novo autómato são os de A e o estado inicial de A, caso contrário (ou seja, em A, a partir do estado inicial é possível "atingir" um estado final sem ler qualquer símbolo em I, o que significa que A aceita a sequência vazia).

EXEMPLO: Considere-se o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

tal que

δ	0	1	ϵ
q_0	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_0\}$

Para construir, de acordo com o algoritmo, um autómato finito não determinista sem movimentos ϵ, A', tal que $L_A = L_{A'}$ procede-se do seguinte modo:

- o *fecho-*ϵ de cada um dos estados de A é
  - *fecho-*$\epsilon(q_0) = \{q_0\}$
  - *fecho-*$\epsilon(q_1) = \{q_1\}$
  - *fecho-*$\epsilon(q_2) = \{q_0, q_2\}$
- o autómato A' é

  $$A' = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta', q_0, \{q_2\})$$

  onde, tendo em conta que para cada $q \in \{q_0, q_1, q_2\}$ e $i \in \{0,1\}$,

  $$\delta'(q,i) = \delta^*(q,i) = \bigcup_{q' \in fecho\text{-}\epsilon(q)} fecho\text{-}\epsilon(\delta(q', i))$$

  a função δ' é tal que

δ'	0	1
q_0	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_1\}$

EXEMPLO: Seja o autómato $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $I = \{0, 1, 2\}$
- $F = \{q_2\}$
- $\delta = Q \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$ tal que

δ	0	1	2	ϵ
q_0	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$

Para construir, de acordo com o algoritmo, um autómato finito não determinista sem movimentos ϵ, A', tal que $L_A = L_{A'}$ procede-se do seguinte modo:

- o *fecho*-ϵ de cada um dos estados de A é
  - *fecho*-$\epsilon(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
  - *fecho*-$\epsilon(q_1) = \{q_1, q_2\}$
  - *fecho*-$\epsilon(q_2) = \{q_2\}$
- o autómato A' é

$$A' = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, 2\}, \delta', q_0, \{q_0, q_2\})$$

onde, tendo em conta que para cada $q \in \{q_0, q_1, q_2\}$ e $i \in \{0, 1, 2\}$,

$$\delta'(q, i) = \delta^*(q, i) = \bigcup_{q' \in \mathit{fecho}\text{-}\epsilon(q)} \mathit{fecho}\text{-}\epsilon(\delta(q', i))$$

a função δ' é tal que

δ'	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$