1 Sistema dedutivo $\mathcal{T}$

1.1 Árvores e árvores etiquetadas

Informalmente, uma árvore é uma estrutura constituída por um conjunto de elementos, designados nós, ordenados de um modo particular. Quando se faz a representação gráfica desses nós seguindo a ordem referida obtém-se uma imagem que lembra uma árvore, daí decorrendo a designação dada à estrutura.

Mais rigorosamente, a definição de árvore é a seguinte.

Definição 1.1 Árvore
Uma árvore é um par $(N, \leq)$ constituído por um conjunto finito N, cujos elementos são designados nós, e por uma relação binária $\leq$ em N reflexiva, transitiva, anti-simétrica, com elemento mínimo e tal que, dados $n, n', n'' \in N$, se $n' \leq n$ e $n'' \leq n$ então $n' \leq n''$ ou $n'' \leq n'$. □

Recorde-se que uma relação binária $\leq$ em N é um subconjunto $\leq$ de $N \times N$ e que se usa a $n_1 \leq n_2$ como abreviatura de $(n_1, n_2) \in N$. Recorde-se também que: $\leq$ é *reflexiva* se $n \leq n$ para cada $n \in N$; $\leq$ é *transitiva* se, quaisquer que sejam $n, n', n'' \in N$, se $n \leq n'$ e $n' \leq n''$ então $n \leq n''$; $\leq$ é *anti-simétrica* se, quaisquer que sejam $n, n' \in N$, se $n \leq n'$ e $n' \leq n$ então $n = n'$; $\leq$ tem *elemento mínimo* se existe $n \in N$ tal que $n \leq n'$ para cada $n' \in N$.

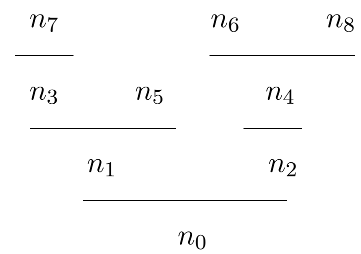
Neste contexto, se $n_1 \leq n_2$, diz-se que o nó n_2 é *sucessor* do nó n_1, ou, de modo equivalente, que n_1 é *predecessor* de n_2. O nó n_2 é *sucessor directo* de n_1 se $n_1 \neq n_2$, n_2 é sucessor de n_1 e não existe n_3 distinto de n_1 e de n_2 que seja simultaneamente sucessor de n_1 e predecessor de n_2. De modo equivalente, neste caso, diz-se que n_1 é *predecessor directo* de n_2. O elemento mínimo é designado por *raiz* da árvore. Os nós que não têm sucessores directos são as *folhas* da árvore. Se n é um nó folha, o conjunto dos nós que são predecessores de n designa-se por *ramo* da árvore. Note-se que cada ramo inclui o nó raiz e uma única folha.

Exemplo 1.2 Constitui uma árvore o par $(N, \leq)$ em que

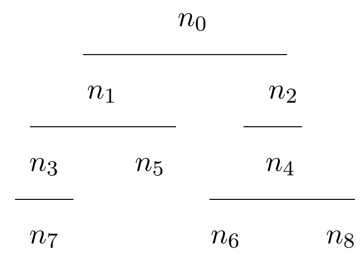
- $N = \{n_i : 0 \leq i \leq 8\}$
- $n_i \leq n_i$, $n_0 \leq n_i$, $n_1 \leq n_{2i-1}$ e $n_2 \leq n_{2i}$ para cada $0 \leq i \leq 8$,
  $n_3 \leq n_7$, $n_2 \leq n_4$ e $n_2 \leq n_8$.

O nó raiz é n_0. Os sucessores directos de n_0 são n_1 e n_2. Os sucessores de n_1 são n_1, n_3, n_5 e n_7. As folhas são n_5, n_6, n_7 e n_8. Existem assim quatro ramos: $\{n_0, n_1, n_5\}$, $\{n_0, n_1, n_3, n_7\}$, $\{n_0, n_2, n_4, n_6\}$ e $\{n_0, n_2, n_4, n_8\}$.

Representando graficamente esta estrutura, dispondo os nós de modo a respeitarem a ordenação induzida por $\leq$, com a raiz em baixo e as folhas no topo, e com uma linha horizontal separando cada nó dos seus sucessores directos, para melhor percepção, obtém-se



É também frequente adoptar a representação em que a raiz se encontra no topo:



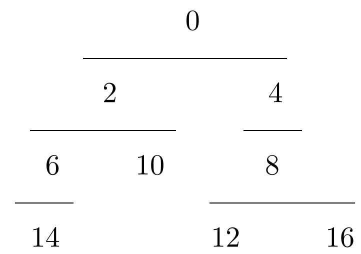
Esta será a representação adoptada neste texto. □

É muitas vezes relevante associar determinada informação aos nós de uma árvore, o que pode ser conseguido através de uma função cujo domínio é o conjunto dos nós da árvore. Obtém-se assim uma árvore etiquetada.

Definição 1.3 Árvore etiquetada
Uma árvore etiquetada é um triplo $(N, \leq, etq)$ em que $(N, \leq)$ é um árvore e $etq : N \to Etq$ é uma função. O conjunto Etq é o conjunto das etiquetas. □

Exemplo 1.4 Considerando a árvore $(N, \leq)$ referida no Exemplo 1.2 tem-se que $(N, \leq, etq)$ em que $etq : N \to \mathbb{N}_0$, com $etq(n_i) = 2i$ para cada $1 \leq i \leq 8$, é uma árvore etiquetada. O conjunto das etiquetas é neste caso o conjunto $\mathbb{N}_0$, pelo que a cada nó se está a associar um número inteiro positivo ou nulo.

A sua representação gráfica é semelhante à anteriormente apresentada mas, em vez de estarem presentes os nomes dos nós, estão agora representadadas as etiquetas correspondentes:



□

1.2 Sistema dedutivo $\mathcal{T}$

O sistema dedutivo $\mathcal{T}$, também designado *sistema de tableaux* ou *sistema* ou *cálculo de Smullyan*, é um sistema dedutivo cujas derivações são árvores etiquetadas. A estas árvores dá-se o nome de *tableaux*. As etiquetas dos nós dos *tableaux* são conjuntos de fórmulas. Os *tableaux* constroem-se partindo de um *tableau* singular (uma árvore com um único nó) e aplicando sucessivamente regras de inferência do sistema. Se o conjunto de fórmulas Φ é a etiqueta do nó raiz do *tableau* diz-se que este é um *tableau* para Φ.

No sistema $\mathcal{T}$ existem onze regras de inferência assim designadas:

- regra $\wedge$
- regra $\neg\wedge$
- regra $\vee$
- regra $\neg\vee$
- regra $\rightarrow$
- regra $\neg\rightarrow$
- regra $\neg\neg$
- regra $\forall$
- regra $\neg\forall$
- regra $\exists$
- regra $\neg\exists$

Estão presentes duas regras relacionadas com cada conectivo, com a excepção do conectivo $\neg$, e duas regras relacionadas com cada quantificador.

A aplicação de uma regra a um *tableau* t vai dar origem a um novo *tableau*. Este novo *tableau* é obtido a partir de t acrescentando um ou dois nós sucessores directos a alguma folha de t. A etiqueta de cada um desses novos nós é um conjunto de fórmulas que depende da regra em causa. Quando se aplica a regra $\wedge$, a regra $\neg\vee$, a regra $\neg\rightarrow$, a regra $\neg\neg$, a regra $\forall$, a regra $\neg\forall$, a regra $\exists$ ou a regra $\neg\exists$, é acrescentado apenas um nó sucessor a uma dada folha de t. Por isso estas regras são designadas regras *unárias*. No caso da aplicação de cada uma das outras regras são acrescentados dois nós sucessores. Estas outras regras são assim designadas regras *binárias*.

Uma dada regra só pode ser aplicada a um *tableau* t se na etiqueta de algum nó de t existir uma fórmula com a sintaxe adequada. Por exemplo, para aplicar a regra $\wedge$ a t tem de existir em algum nó de t uma fórmula do tipo $\varphi \wedge \psi$ e para aplicar a regra $\neg\wedge$ tem de existir uma fórmula do tipo $\neg(\varphi\wedge\psi)$. Escolhida a fórmula com a sintaxe adequada e o nó a que pertence, diz-se então que a regra de inferência correspondente pode ser aplicada a essa fórmula, e é apenas à folha de um ramo r que inclua esse nó que a aplicação da regra permite acrescentar o(s) novo(s) nó(s). Pode também então dizer-se que o novo *tableau* é obtido a partir de t por aplicação da regra de inferência à fórmula em causa, relativamente ao ramo r.

Apresentam-se agora as regras de inferência do sistema dedutivo $\mathcal{T}$. Na representação usada para estas regras, a fórmula acima da linha horizontal estabelece a sintaxe da fórmula que deve estar presente na etiqueta de algum nó do *tableau* para se poder aplicar a regra. As fórmulas abaixo da linha horizontal representam as fórmulas que vão estar presentes na(s) etiqueta(s) do(s) novo(s) nó(s) acrescentado(s) por aplicação da regra. O símbolo | ocorre nas regras binárias, caso em que são acrescentados a uma folha dois nós sucessores directos. A fórmula à esquerda do símbolo | constitui a etiqueta de um dos nós e a fórmula à direita a do outro. Nos outros casos trata-se de regras unárias, sendo apenas acrescentado um sucessor directo a uma folha. Se estão presentes duas fórmulas separadas por uma vírgula, a etiqueta de cada novo nó é constituída por essas duas fórmulas, caso contrário a etiqueta inclui apenas a fórmula indicada. A designação da regra está presente à direita da linha horizontal.

Regras de inferência do sistema $\mathcal{T}$:
As regras de inferência de $\mathcal{T}$ são as seguintes

<u>REGRA $\wedge$</u>

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi, \psi}\ \wedge$$

<u>REGRA $\neg\wedge$</u>

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \quad | \quad \neg\psi}\ \neg\wedge$$

<u>REGRA $\neg\vee$</u>

$$\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi, \neg\psi}\ \neg\vee$$

<u>REGRA $\vee$</u>

$$\frac{\varphi \vee \psi}{\varphi \quad | \quad \psi}\ \vee$$

<u>REGRA $\neg \rightarrow$</u>

$$\frac{\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi, \neg\psi}\ \neg \rightarrow$$

<u>REGRA $\rightarrow$</u>

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg\varphi \quad | \quad \psi}\ \rightarrow$$

<u>REGRA $\neg\neg$</u>

$$\frac{\neg(\neg\varphi)}{\varphi}\ \neg\neg$$

REGRA $\forall$

$$\frac{\forall x\,\varphi}{[\varphi]^x_t}\;\forall$$

t é um termo

REGRA $\neg\forall$

$$\frac{\neg(\forall x\,\varphi)}{\neg([\varphi]^x_y)}\;\neg\forall$$

y é uma variável que não ocorre no *tableau*

REGRA $\exists$

$$\frac{\exists x\,\varphi}{[\varphi]^x_y}\;\exists$$

y é uma variável que não ocorre no *tableau*

REGRA $\neg\exists$

$$\frac{\neg(\exists x\,\varphi)}{\neg([\varphi]^x_t)}\;\neg\exists$$

t é um termo

Note-se que nas regras $\neg\forall$ e $\exists$, para além de ter de existir no *tableau* uma fórmula com a sintaxe indicada, exige-se ainda que variável y não exista em nenhuma das fórmulas do *tableau* a que se aplica a regra. Recorde-se ainda que a notação $[\varphi]^x_t$ pressupõe que o termo t é livre para a variável x em φ.

Pode considerar-se apenas o fragmento proposicional deste sistema dedutivo, ou seja, o sistema que se obtém quando se eliminam as regras $\forall$, $\neg\forall$, $\exists$, $\neg\exists$ e se consideram apenas fórmulas proposicionais. Este sistema é designado por $\mathcal{T}_p$.

Apresentam-se seguidamente vários exemplos ilustrativos. Para simplificar a notação, é usual omitir as chavetas dos conjuntos que etiquetam os nós dos *tableaux*. Ao construir um *tableau* é também usual incluir a designação das regras que são aplicadas na sua construção.

Exemplo 1.5 Considere-se o conjunto $\Phi = \{\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3)\,,\, \psi_1 \wedge \psi_2\}$. Comece-se por considerar o *tableau* singular para Φ, isto é, a árvore com um único nó cuja etiqueta é este conjunto:

$$\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3)\,,\, \psi_1 \wedge \psi_2$$

Tendo em conta as fórmulas do conjunto, podem aplicar-se duas regras a este *tableau*: a regra $\neg\rightarrow$, à fórmula $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3)$, e a regra $\wedge$, à fórmula $\psi_1 \wedge \psi_2$. Aplicando a regra $\neg\rightarrow$ obtém-se o *tableau* seguinte.

$$\frac{\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3)\,,\, \psi_1 \wedge \psi_2}{\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)\,,\;\; \neg\psi_3}\;\neg\rightarrow$$

Ao único nó do *tableau* inicial acrescentou-se um nó sucessor directo, etiquetado pelo conjunto constituído pelas fórmulas $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ e $\neg\psi_3$. A designação da regra é incluída à direita.

A este novo *tableau* continua a poder-se aplicar a regra $\wedge$ à fórmula $\psi_1 \wedge \psi_2$. Aplicando esta regra obtém-se :

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3)\,,\ \psi_1 \wedge \psi_2}{\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)\,,\ \neg\psi_3}\ \neg\to}{\psi_1\,, \psi_2}\ \wedge$$

À (única) folha do *tableau* anterior acrescentou-se um sucessor directo, cuja etiqueta é o conjunto constituído por ψ_1 e ψ_2. Aplica-se agora a regra $\neg\wedge$, naturalmente à fórmula $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3)\,,\ \psi_1 \wedge \psi_2}{\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)\,,\ \neg\psi_3}\ \neg\to}{\psi_1\,, \psi_2}\ \wedge}{\neg\psi_1 \qquad\qquad \neg\psi_2}\ \neg\wedge$$

Foram acrescentados dois nós, ambos sucessores directos da folha do *tableau* anterior, um etiquetado com $\neg\psi_1$ outro com $\neg\psi_2$. O *tableau* obtido tem assim dois ramos.

Recorde-se que todos os *tableaux* até agora obtidos são *tableaux* para o conjunto Φ, pois a etiqueta da raiz de cada um destes *tableaux* é Φ.

Por vezes, para além de se indicar a regra usada, pode ser relevante indicar explicitamente qual é o nó e a fórmula que permitiram aplicação dessa regra. Nesse caso, numeram-se convenientemente as fórmulas, sendo o seu número indicado junto com o nome da regra. No caso que tem vindo a ser ilustrado neste exemplo ter-se-á:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3)^{(1)},\ \psi_1 \wedge \psi_2^{(2)}}{\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)^{(3)},\ \neg\psi_3}\ \neg\to,\ (1)}{\psi_1\,, \psi_2}\ \wedge,\ (2)}{\neg\psi_1 \qquad\qquad \neg\psi_2}\ \neg\wedge,\ (3)$$

□

Exemplo 1.6 Apresentam-se mais alguns exemplos de *tableaux*. O primeiro é o *tableau* t_1 para $\{\neg(\psi_1 \to (\neg\psi_2)), \psi_1 \vee \neg\psi_2\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\psi_1 \to (\neg\psi_2)), \psi_1 \vee \neg\psi_2}{\psi_1,\ \neg(\neg\psi_2)}\ \neg\to}{\psi_2}\ \neg\neg}{\psi_1 \qquad\qquad \neg\psi_2}\ \vee$$

Segue-se o *tableau* t_2 para o conjunto conjunto constituído pela fórmula

$$\neg((\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))).$$

Neste caso indicam-se explicitamente as fórmulas a que se aplicam as regras.

$$\dfrac{\neg((\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))))^{(1)}}{\dfrac{\begin{array}{c}\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)^{(2)},\\ \neg((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))^{(3)}\end{array}}{\dfrac{\begin{array}{c}\psi_1 \to \psi_2^{(4)},\\ \neg(\psi_1 \to \psi_3)^{(5)}\end{array}}{\dfrac{\psi_1,\ \neg\psi_3}{\neg\psi_1 \qquad \dfrac{\psi_2 \to \psi_3^{(6)}}{\neg\psi_1 \qquad \dfrac{\psi_2}{\neg\psi_2 \qquad \psi_3}\ \to (6)}\ \to (4)}\ \to (2)}\ \neg\to (5)}\ \neg\to (3)}\ \neg\to (1)$$

O *tableau* seguinte, o *tableau* t_3, é um *tableau* para o conjunto constituído pela fórmula

$$\neg((\exists x\ P(x)) \to (\neg(\exists x\ (\neg P(x)))))$$

onde P é um símbolo de predicado unário. Volta-se a fazer referência explícita às fórmulas a que se aplicam as regras.

$$\dfrac{\neg((\exists x\ P(x)) \to (\neg(\exists x\ (\neg P(x)))))^{(1)}}{\dfrac{\begin{array}{c}\exists x\ P(x)^{(2)},\\ \neg(\neg(\exists x\ (\neg P(x)))))^{(3)}\end{array}}{\dfrac{\exists x\ (\neg P(x))^{(4)}}{\dfrac{P(y)}{\neg P(z)}\ \exists\ (4)}\ \exists\ (2)}\ \neg\neg\ (3)}\ \neg\to (1)$$

Recorde-se que ao aplicar a regra $\exists$ há que utilizar variáveis que não ocorrem nas fórmulas presentes no *tableau*.

Segue-se o *tableau* t_4 para o conjunto constituído pela fórmula

$$\neg((\exists x\ (\forall\ yQ(x,y))) \to (\forall y\ (\exists\ xQ(x,y))))$$

onde Q é um símbolo de predicado binário.

$$\frac{\neg((\exists x\ (\forall y\ Q(x,y))) \to (\forall y\ (\exists x\ Q(x,y))))}{\begin{array}{c}\exists x\ (\forall y\ Q(x,y)),\\ \neg(\forall y\ (\exists x\ Q(x,y)))\end{array}}\ \neg\to$$

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x\ (\forall y\ Q(x,y)),\\ \neg(\forall y\ (\exists x\ Q(x,y)))\end{array}}{\forall y\ Q(z,y)}\ \exists \qquad \frac{\forall y\ Q(z,y)}{\neg\exists x\ Q(x,w)}\ \neg\forall \qquad \frac{\neg\exists x\ Q(x,w)}{Q(z,w)}\ \forall \qquad \frac{Q(z,w)}{\neg Q(z,w)}\ \neg\exists$$

O próximo é o *tableau* t_5 para o conjunto

$$\{\forall x\ (P(x)\to R(x)), \neg((P(a)\wedge P(b))\to(R(a)\wedge R(b)))\}$$

onde P e R são símbolos de predicado unários. Uma vez mais são indicadas explicitamente as fórmulas a que se aplicam as regras.

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (P(x)\to R(x))^{(1)},\\ \neg((P(a)\wedge P(b))\to(R(a)\wedge R(b)))^{(2)}\end{array}}{\begin{array}{c}P(a)\wedge P(b)^{(3)},\\ \neg(R(a)\wedge R(b))^{(4)}\end{array}}\ \neg\to (2)$$

$$\frac{\begin{array}{c}P(a)\wedge P(b)^{(3)},\\ \neg(R(a)\wedge R(b))^{(4)}\end{array}}{P(a), P(b)}\ \wedge\ (3) \qquad \frac{P(a), P(b)}{P(a)\to R(a)^{(5)}}\ \forall\ (1) \qquad \frac{P(a)\to R(a)^{(5)}}{\neg P(a) \qquad\qquad R(a)}\ \to (5)$$

$$\frac{R(a)}{\neg R(b) \qquad\qquad \neg R(a)}\ \neg\wedge\ (4) \qquad \frac{\neg R(b)}{P(b)\to R(b)^{(6)}}\ \forall\ (1) \qquad \frac{P(b)\to R(b)^{(6)}}{\neg P(b) \qquad\qquad R(b)}\ \to (6)$$

Note-se que na construção deste *tableau* se aplicou duas vezes a regra $\forall$ à fórmula (1). Numa das vezes, substitui-se a variável x pela constante a e na outra pela constante b. $\square$

O sistema dedutivo $\mathcal{T}$ é um sistema de refutação. Cada ramo de um *tableau* t pode ser visto como correspondendo a uma tentativa de construir uma interpretação que satisfaça o conjunto Φ associado à raiz de t. Em certos casos essas tentativas falham porque a interpretação deveria satisfazer simultaneamente uma dada fórmula e sua negação. Quando todas as tentativas falham, pode concluir-se que não existe nenhuma interpretação que satisfaça Φ.

Assim, como se provará adiante, para determinar se uma fórmula φ é válida, pode considerar-se um *tableau* para $\Phi = \{\neg\varphi\}$. Cada ramo de t corresponde então a uma tentativa de encontrar uma interpretação que satisfaça $\neg\varphi$, ou seja, corresponde a uma tentativa de encontrar um contra-exemplo para a asserção representada por φ, isto é, corresponde a uma tentativa de refutar a asserção representada por φ. Se todas as tentativas falham, não existe uma tal interpretação e portanto φ é válida.

No caso de um *tableau* para $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi\}$, cada ramo pode ser visto como correspondendo a uma tentativa de construir uma interpretação que satisfaça $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e não satisfaça φ. Se todas as tentativas falham, não existe um tal interpretação e portanto φ é consequência semântica de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Este assunto será estudado com detalhe na secção seguinte. Para tal convém desde já introduzir as noções de ramo fechado, de *tableau* fechado, de ramo aberto, de *tableau* aberto, de conjunto confutado, de teorema de $\mathcal{T}$ e de derivação em $\mathcal{T}$. Usar-se-á *Form*(r) para denotar o conjunto das fórmulas de um ramo r de um *tableau*.

Definição 1.7 Ramo fechado e ramo aberto
Um ramo r de um *tableau* é ramo fechado se existe uma fórmula φ tal que φ e $\neg\varphi$ pertencem ambas a *Form*(r); r é ramo aberto se não é fechado. $\square$

Exemplo 1.8 O *tableau* t_1 do Exemplo 1.6 tem um ramo fechado e um ramo aberto.

Por vezes é útil indicar explicitamente no *tableau* quais são os ramos fechados. Para este propósito usa-se neste texto o símbolo $\times$. No caso do *tableau* t_1, por exemplo, tem-se então

$$\begin{array}{c}
\neg(\psi_1 \to \psi_2), \psi_1 \vee \neg\psi_2 \\
\hline
\psi_1,\ \neg(\neg\psi_2) \\
\hline
\psi_2 \\
\hline
\begin{array}{cc} \psi_1 \qquad & \qquad \neg\psi_2 \\ & \qquad \times \end{array}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \neg \to \\ \\ \neg\neg \\ \\ \vee \\ \\ \end{array}$$

$\square$

Definição 1.9 Tableau fechado e tableau aberto
Um *tableau* t diz-se tableau fechado se todos os ramos de t são ramos fechados e diz-se tableau aberto se não é fechado. $\square$

Definição 1.10 Conjunto confutado
Um conjunto de fórmulas Φ diz-se confutado se existe um tableau fechado para Φ. A fórmula φ diz-se confutada se o conjunto $\{\varphi\}$ é confutado. $\square$

Definição 1.11 TEOREMA DE $\mathcal{T}$ E DERIVAÇÃO EM $\mathcal{T}$

- A fórmula φ diz-se teorema de $\mathcal{T}$, o que se representa por

$$\vdash_{\mathcal{T}} \varphi$$

  se $\neg\varphi$ é fórmula confutada.

- Existe uma derivação da fórmula φ a partir do conjunto de fórmulas Φ no sistema $\mathcal{T}$, o que se representa por

$$\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$$

  se $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é conjunto confutado. $\square$

Exemplo 1.12 Os *tableaux* t_1 e t_3 do Exemplo anterior são abertos. Os *tableaux* t_2 e t_4 são fechados e portanto

$$\neg((\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))))$$

e

$$\neg((\exists x\ (\forall y\ Q(x,y))) \to (\forall y\ (\exists x\ Q(x,y))))$$

são fórmulas confutadas. O *tableau* t_5 é também fechado pelo que

$$\{\forall x\ (P(x) \to R(x)), \neg((P(a) \wedge P(b)) \to (R(a) \wedge R(b)))\}$$

é conjunto confutado.

Consquentemente, tem-se que

$$\vdash_{\mathcal{T}} (\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3)))$$

e

$$\vdash_{\mathcal{T}} (\exists x\ (\forall y\ Q(x,y))) \to (\forall y\ (\exists x\ Q(x,y)))$$

e também

$$\{\forall x\ (P(x) \to R(x))\} \vdash_{\mathcal{T}} (P(a) \wedge P(b)) \to (R(a) \wedge R(b))$$

$\square$

Deixa-se como exercício a verificação de que usando a abreviatura definida para $\leftrightarrow$ e as regras do sistema $\mathcal{T}$ anteriormente apresentadas se obtêm as seguintes regras (derivadas):

REGRA $\neg\leftrightarrow$	REGRA $\leftrightarrow$
$$\dfrac{\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)}{\varphi, \neg\psi \quad \mid \quad \neg\varphi, \psi}\ \neg\leftrightarrow$$	$$\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi, \psi \quad \mid \quad \neg\varphi, \neg\psi}\ \leftrightarrow$$

2 Correcção do sistema $\mathcal{T}$

Como foi referido, cada ramo r de um *tableau* para Φ pode ser visto como correspondendo a uma tentativa de encontrar uma interpretação que satisfaça Φ. Um ramo fechado corresponde a uma tentativa falhada porque obrigaria a que a interpretação satisfizesse uma certa fórmula e a sua negação. Se todos os ramos de um *tableau* t para Φ são fechados isso significa que todas as tentativas falharam e, portanto, Φ não é possível. Se $\Phi = \{\neg\varphi\}$, a fórmula φ é válida. Com efeito, neste caso, cada ramo do *tableau* corresponde a uma tentativa de refutar φ (pois é uma tentativa de verificar $\neg\varphi$) e se todas as tentativas falham então não é possível refutar a fórmula, pelo que a fórmula é válida. Se $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi\}$, dado que Φ não é possível, então qualquer interpretação que satisfaça $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ satisfaz obrigatoriamente φ, pelo que φ é consequência semântica de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$

Estas afirmações são enunciadas de um modo mais rigoroso nas definições e proposições seguintes. Uma das noções fundamentais é a noção de correcção de regra de inferência.

Definição 2.1 CORRECÇÃO DE REGRA DE INFERÊNCIA DE $\mathcal{T}$
Uma regra do sistema $\mathcal{T}$ diz-se correcta se verifica a seguinte condição:

> se t é um *tableau* com um ramo r tal que $Form(r)$ é um conjunto possível então qualquer *tableau* t' obtido a partir de t por aplicação dessa regra tem também um ramo r' tal que $Form(r')$ é um conjunto possível.

$\square$

Todas as regras do sistema $\mathcal{T}$ são correctas. Este resultado é estabelecido na proposição seguinte.

Proposição 2.2 CORRECÇÃO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA DE $\mathcal{T}$
Todas as regras de inferência do sistema $\mathcal{T}$ são correctas.

Prova: Há que fazer a prova para cada uma das regras.

Regra $\wedge$: Seja t um *tableau* e r ramo de r tal que $Form(r)$ é conjunto possível. A regra $\wedge$ pode ser aplicada a t quando $\varphi \wedge \psi$ pertence a algum ramo $\overline{r}$ de t, ou seja, $\varphi \wedge \psi \in Form(\overline{r})$. Da aplicação da regra resulta que todos os ramos de t são ramos de t', com excepção de $\overline{r}$. Em t', em vez de $\overline{r}$, existe um ramo $\overline{r}'$, que resulta de acrescentar um sucessor à folha de $\overline{r}$ e que verifica $Form(\overline{r}') = Form(\overline{r}) \cup \{\varphi, \psi\}$.

Se o ramo r referido no início não é $\overline{r}$ o resultado é trivial.

Suponha-se agora que $\overline{r}$ é r, pelo que $Form(\overline{r})$ (isto é $Form(r)$) é conjunto possível. Sendo $I\!M\!I$ uma estrutura de interpretação e ρ uma atribuição, se $I\!M\!I, \rho \models Form(\overline{r})$ então, em particular, $I\!M\!I, \rho \models \varphi \wedge \psi$ e portanto $I\!M\!I, \rho \models \varphi$ e $I\!M\!I, \rho \models \psi$. Consequentemente, $I\!M\!I, \rho \models Form(\overline{r}) \cup \{\varphi, \psi\}$, pelo que $Form(\overline{r}')$ é um conjunto possível.

Regra $\vee$: O raciocínio é semelhante ao anterior. Neste caso a fórmula é do tipo $\varphi \vee \psi$ e, em t', em vez do ramo $\overline{r}$ estão presentes os ramos $\overline{r}'_1$ e $\overline{r}'_2$, em que cada um deles resulta de acrescentar um sucessor à folha de $\overline{r}$, e tais que $F(\overline{r}'_1) = F(\overline{r}) \cup \{\varphi\}$ e $F(\overline{r}'_2) = F(\overline{r}) \cup \{\psi\}$.

No caso em que $\overline{r}$ é r, $Form(\overline{r})$ (isto é $Form(r)$) é conjunto possível e portanto existe uma estrutura de interpretação $I\!M$ e uma atribuição ρ tais que $I\!M, \rho \models Form(\overline{r})$. Em particular, $I\!M, \rho \models \varphi \vee \psi$ e portanto $I\!M, \rho \models \varphi$ ou $I\!M, \rho \models \psi$. Consequentemente, $I\!M, \rho \models Form(\overline{r}) \cup \{\varphi\}$ ou $I\!M, \rho \models Form(\overline{r}) \cup \{\psi\}$ pelo que ou $Form(\overline{r}'_1)$ é um conjunto possível ou $Form(\overline{r}'_2)$ é um conjunto possível.

Regra $\forall$: O raciocínio é semelhante ao caso da regra $\wedge$, mas neste caso a fórmula é do tipo $\forall x\, \varphi$ e $Form(\overline{r}') = Form(\overline{r}) \cup \{[\varphi]^x_t\}$. No caso em que $\overline{r}$ é r, $Form(\overline{r})$ (isto é $Form(r)$) é conjunto possível e portanto existe uma estrutura de interpretação $I\!M$ e uma atribuição ρ tais que $I\!M, \rho \models Form(\overline{r})$. Em particular, $I\!M, \rho \models \forall x\, \varphi$. Então, para cada $u \in U$, $I\!M, \rho[x := u] \models \varphi$. Considerando $[\![t]\!]^\rho_{I\!M} \in U$ tem-se que, $I\!M, \rho[x := [\![t]\!]^\rho_{I\!M}] \models \varphi$. Prova-se, o que se deixa como exercício, que se $I\!M, \rho[x := [\![t]\!]^\rho_{I\!M}] \models \varphi$ então $I\!M, \rho \models [\varphi]^x_t$. Consequentemente, $I\!M, \rho \models Form(\overline{r}) \cup \{[\varphi]^x_t\}$, pelo que $Form(\overline{r}')$ é um conjunto possível.

Regra $\exists$: O raciocínio é de novo semelhante ao caso da regra $\wedge$, mas neste caso a fórmula é do tipo $\exists x\, \varphi$ e $Form(\overline{r}') = Form(\overline{r}) \cup \{[\varphi]^x_y\}$ em y é uma variável que não ocorre no tableau. No caso em que $\overline{r}$ é r, $Form(\overline{r})$ (isto é $Form(r)$) é conjunto possível e portanto existe uma estrutura de interpretação $I\!M$ e uma atribuição ρ tais que $I\!M, \rho \models Form(\overline{r})$. Em particular, $I\!M, \rho \models \exists x\, \varphi$. Então, existe $u \in U$ tal que $I\!M, \rho[x := u] \models \varphi$. Considere-se a atribuição $\rho[y := u]$. Como y não ocorre nas fórmulas de t, tem-se que $I\!M, \rho[y := u] \models Form(\overline{r})$. Como $I\!M, \rho[x := u] \models \varphi$ e y não ocorre em φ (pela condição da regra), prova-se, o que se deixa como exercício, que se $I\!M, \rho[x := u] \models \varphi$ então $I\!M, \rho[y := u] \models [\varphi]^x_y$. Consequentemente, $I\!M, \rho[y := u] \models Form(\overline{r}) \cup \{[\varphi]^x_y\}$, pelo que $Form(\overline{r}')$ é um conjunto possível.

Os outros casos deixam-se como exercício. $\square$

Estabelece-se agora que Φ é um conjunto impossível sempre que exista um *tableau* para Φ fechado.

Proposição 2.3 Seja t um *tableau* para Φ.

1. Se Φ conjunto é possível então existe uma ramo r de t tal que $Form(r)$ é possível.

2. Se t é fechado então Φ é impossível.

Prova (esboço): (1) Os *tableaux* são construídos por aplicação sucessiva de regras de inferência e portanto a afirmação é consequência da correcção das regras de $\mathcal{T}$.

(2) Num *tableau* fechado todos os ramos são fechados. Assim, por (1), se Φ fosse um conjunto possível, o conjunto de fórmulas de algum ramo de t seria um conjunto possível. Mas o conjunto de fórmulas de qualquer ramo fechado é sempre um conjunto impossível. Consequentemente, Φ é necessariamente um conjunto impossível. $\square$

Como corolário da proposição anterior estabelecem-se resultados que relacionam validade de fórmulas e consequência semântica com teoremas de $\mathcal{T}$ e derivações em $\mathcal{T}$.

Corolário 2.4

1. Se o conjunto de fórmulas Φ é confutado então Φ é conjunto impossível.
2. Se $\vdash_{\mathcal{T}} \varphi$ então $\models \varphi$.
3. Se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$. $\square$

Exemplo 2.5 A partir dos *tableaux* t_2, t_4 e t_5 anteriores pode concluir-se que

- $\models (\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3)))$;
- $\models (\exists x\ (\forall y\ Q(x, y))) \to (\forall y\ (\exists x\ Q(x, y)))$;
- $\{\forall x\ (P(x) \to R(x))\} \models (P(a) \wedge P(b)) \to (R(a) \wedge R(b))$. $\square$

3 Construção de modelos no caso proposicional

Como foi referido, se existe um *tableau* fechado para um conjunto Φ então Φ é um conjunto impossível. Quando não é possível construir um *tableau* fechado para o conjunto Φ é porque este é possível. Em certos casos pode-se extrair uma interpretação que satisfaz todas as fórmulas em Φ a partir de um ramo aberto de um *tableau* para o conjunto.

Na secção trata-se apenas o caso proposicional, isto é, considera-se apenas o sistema dedutivo $\mathcal{T}_p$.

Definição 3.1 Ramo esgotado de tableau de $\mathcal{T}_p$
Um ramo de um *tableau* de $\mathcal{T}_p$ diz-se esgotado se para cada fórmula φ em $\mathit{Form}(r)$ se tem que

- se φ é $\neg\neg\psi$ então $\psi \in \mathit{Form}(r)$;
- se φ é $\psi_1 \wedge \psi_2$ então $\psi_1, \psi_2 \in \mathit{Form}(r)$;
- se φ é $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ então ou $\neg\psi_1 \in \mathit{Form}(r)$ ou $\neg\psi_2 \in \mathit{Form}(r)$;
- se φ é $\psi_1 \vee \psi_2$ então ou $\psi_1 \in \mathit{Form}(r)$ ou $\psi_2 \in \mathit{Form}(r)$;
- se φ é $\neg(\psi_1 \vee \psi_2)$ então $\neg\psi_1, \neg\psi_2 \in \mathit{Form}(r)$;
- se φ é $\psi_1 \to \psi_2$ então ou $\neg\psi_1 \in \mathit{Form}(r)$ ou $\psi_2 \in \mathit{Form}(r)$;
- se φ é $\neg(\psi_1 \to \psi_2)$ então $\psi_1, \neg\psi_2 \in \mathit{Form}(r)$. $\square$

Note-se que para obter *tableaux* com ramos esgotados basta garantir que se vão aplicando a todas as fórmulas que estão presentes nas etiquetas dos nós dos *tableaux* as regras correspondentes, e que as regras vão sendo aplicadas relativamente a todos os ramos que incluam o nó em cuja etiqueta se encontra a fórmula em causa.

Exemplo 3.2 Assumindo que ψ_1, ψ_2 e ψ_3 são símbolos proposicionais, os *tableaux* t_1 e t_2 do Exemplo 1.1 têm todos os seus ramos esgotados. Note-se que alguns destes ramos são abertos e outros são fechados. $\square$

Corolário 3.3

1. Se o conjunto de fórmulas Φ é confutado então Φ é conjunto impossível.
2. Se $\vdash_{\mathcal{T}} \varphi$ então $\models \varphi$.
3. Se $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$ então $\Phi \models \varphi$. $\square$

A partir de cada ramo aberto e esgotado r de um *tableau* para Φ pode construir-se uma valoração que satisfaz Φ. É uma valoração que atribui o valor 1 a todos os símbolos proposicionais que pertencem ao conjunto das fórmulas do ramo e o valor 0 àqueles cuja negação pertence ao conjunto das fórmulas do ramo. Diz-se que uma tal valoração é uma valoração induzida pelo ramo r.

Definição 3.4 VALORAÇÃO INDUZIDA POR RAMO ABERTO E ESGOTADO
Seja r um ramo aberto e esgotado de um *tableau*. Diz-se que uma valoração V é uma valoração induzida por r se

- $V(P) = 1$ para cada $P \in \mathit{Form}(r) \cap \mathit{Prop}$
- $V(P) = 0$ para cada $P \in \mathit{Prop}$ tal que $\neg P \in \mathit{Form}(r)$.

Representa-se por $\mathcal{V}(r)$ o conjunto de toda as valorações induzidas por r. $\square$

Proposição 3.5
Seja t um *tableau* de $\mathcal{T}_p$ para Φ com um ramo r aberto e esgotado. Se $V \in \mathcal{V}(r)$ então V satisfaz o conjunto $\mathit{Form}(r)$ e consequentemente satisfaz Φ.

Prova (esboço): O primeiro passo da prova consiste em reconhecer que, pelo facto de V ser induzida por r, e sendo P um símbolo proposicional, se tem que $V \models P$ se $P \in \mathit{Form}(r)$ e $V \models \neg P$ se $\neg P \in \mathit{Form}(r)$.

Sendo P e Q símbolos proposicionais, se $P \wedge Q \in \mathit{Form}(r)$, por exemplo, por definição de ramo esgotado, $P, Q \in \mathit{Form}(r)$ e portanto $V \models P$ e $V \models Q$. Assim $V \models P \wedge Q$.

Se $P \vee Q \in \mathit{Form}(r)$, por exemplo, por definição de ramo esgotado, $P \in \mathit{Form}(r)$ ou $Q \in \mathit{Form}(r)$ e portanto $V \models P$ ou $V \models Q$. Assim $V \models P \vee Q$.

Raciocinando de modo análogo para as outras fórmula em $\mathit{Form}(r)$ pode concluir-se que $V \models \mathit{Form}(r)$. Note-se que uma prova rigorosa desta proposição deverá ser feita por indução no número de conectivos das fórmulas.

Finalmente, como $\Phi \subseteq \mathit{Form}(r)$, tem-se que $V \models \Phi$. $\square$

Exemplo 3.6 Assumindo que ψ_1, ψ_2 são símbolos proposicionais, o *tableau* t_1 do Exemplo 1.1 tem um ramo aberto e esgotado. Os símbolos proposicionais que pertencem a esse ramo são ψ_1 e ψ_2 e nenhuma negação de um símbolo proposicional pertence ao ramo. Assim, uma valoração tal que $V(\psi_1) = V(\psi_2) = 1$ é uma valoração induzida por esse ramo. Esta valoração satisfaz o conjunto correspondente à raiz de t_1, o conjunto $\{\neg(\psi_1 \to (\neg\psi_2)), \psi_1 \vee \neg\psi_2\}$, isto é, $V(\neg(\psi_1 \to (\neg\psi_2))) = 1$ e $V(\psi_1 \vee \neg\psi_2) = 1$. $\square$

Da Proposição 3.5 decorre que um ramo aberto e esgotado de um *tableau* para Φ induz uma valoração que satisfaz todas as fórmulas do conjunto Φ correspondente à raiz do *tableau*. Uma questão que se pode colocar é a de saber se haverá valorações que satisfaçam Φ e que não possam ser obtidas a partir de ramos abertos e esgotados de *tableaux* para Φ. Prova-se de seguida que se V é uma valoração que satisfaz Φ então, dado um qualquer *tableau* t para Φ no qual cada ramo é fechado ou é esgotado, tem-se que a valoração V é induzida por algum ramo aberto e esgotado de t.

Proposição 3.7
Seja Φ um conjunto de fórmulas e V uma valoração tal que $V \models \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$. Então, dado um qualquer *tableau* t para Φ no qual cada ramo é fechado ou esgotado, existe um ramo r de t aberto e esgotado tal que $V \in \mathcal{V}(r)$.

Prova: Suponha-se, por absurdo, que $V \notin \mathcal{V}(r)$ qualquer que seja o ramo r aberto e esgotado de t. Então, para cada ramo r nestas condições, existe $P \in$ *Prop* que verifica uma das seguintes condições: (i) $P \in Form(r)$ e $V(P) = 0$; (ii) $\neg P \in Form(r)$ e $V(P) = 1$. Designe-se este símbolo proposicional por P^r.

Sejam $P_1, \ldots, P_n$ os diferentes símbolos proposicionais que ocorrem nas fórmulas em Φ e considere-se a fórmula $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$ em que, para cada $1 \leq i \leq n$, $L_i = P_i$ se $V(P_i) = 1$ e $L_i = \neg P_i$ se $V(P_i) = 0$. Note-se que $V \models L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$.

Seja t' o *tableau* para $\Phi \cup \{L_1 \wedge \ldots \wedge L_n\}$ que se obtém juntando $L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$ à etiqueta da raiz de t. Partindo de t' e aplicando sucessivamente a regra $\wedge$ um número adequado de vezes, é possível obter um *tableau* t'' para $\Phi \cup \{L_1 \wedge \ldots \wedge L_n\}$ tal que cada ramo r'' de t'' ou é um ramo fechado de t ou contém um ramo aberto e esgotado r de t com $Form(r) \cup \{L_1, \ldots, L_n\} \subseteq Form(r'')$.

Prova-se agora que cada um dos ramos r'' de t'' que contém um ramo aberto e esgotado r de t é também um ramo fechado. Comece-se por notar que, dado $P \in$ *Prop* , se P ou $\neg P$ está presente nalguma etiqueta de um nó de t então P ocorre também em alguma fórmula em Φ. Considere-se o símbolo proposicional P^r e suponha-se que verifica a condição (i). Então $P^r \in Form(r)$, logo P^r ocorre nalguma fórmula em Φ e portanto existe $1 \leq j \leq n$ tal que $L_j = P^r$ ou $L_j = \neg P^r$. Como, $V(P^r) = 0$, tem-se que $L_j = \neg P^r$. Como $Form(r) \cup \{L_1, \ldots, L_n\} \subseteq Form(r'')$, tem-se que $P^r, \neg P^r \in Form(r'')$, pelo que r'' é fechado. Supondo agora que P^r verifica a condição (ii), tem-se neste caso que $\neg P^r \in Form(r)$ e $L_j = P^r$ e de novo se conclui que r'' é fechado.

Chega-se assim à conclusão que t'' é *tableau* fechado. Pela Proposição 2.3, $\Phi \cup \{L_1 \wedge \ldots \wedge L_n\}$ é um conjunto impossível, isto é, não existe valoração V que satisfaça todas as fórmulas deste conjunto. Isto contradiz o facto de que, por hipótese, $V \models \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$ e o facto de que $V \models L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$. $\square$

4 Construção de modelos no caso geral

Explica-se agora como no caso não exclusivamente proposicional é ainda possível, em determinadas condições, construir interpretações que satisfazem um conjunto de fórmulas Φ, a partir de um *tableau* para Φ.

A ideia é semelhante à apresentada no caso proposicional, sendo as interpretações obtidas a partir de ramos abertos esgotados. O que é diferente neste caso é a noção de ramo esgotado que vai ser utilizada.

Definição 4.1 RAMO ESGOTADO DE TABLEAU DE $\mathcal{T}$
Um ramo de um *tableau* de $\mathcal{T}$ diz-se esgotado se para cada fórmula φ em $Form(r)$ se tem que

- se φ é $\neg\neg\psi$ então $\psi \in Form(r)$;
- se φ é $\psi_1 \wedge \psi_2$ então $\psi_1, \psi_2 \in Form(r)$;
- se φ é $\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$ então ou $\neg\psi_1 \in Form(r)$ ou $\neg\psi_2 \in Form(r)$;
- se φ é $\psi_1 \vee \psi_2$ então ou $\psi_1 \in Form(r)$ ou $\psi_2 \in Form(r)$;
- se φ é $\neg(\psi_1 \vee \psi_2)$ então $\neg\psi_1, \neg\psi_2 \in Form(r)$;
- se φ é $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ então ou $\neg\psi_1 \in Form(r)$ ou $\psi_2 \in Form(r)$;
- se φ é $\neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ então $\psi_1, \neg\psi_2 \in Form(r)$;
- se φ é $\exists x\, \varphi$ então $[\varphi]^x_y \in Form(r)$ para alguma variável y que não ocorra em nenhuma fórmula do *tableau*, excepto na fórmula $[\varphi]^x_y$ referida ;
- se φ é $\neg(\forall x\, \varphi)$ então $\neg([\varphi]^x_y) \in Form(r)$ para alguma variável y que não ocorra em nenhuma fórmula do *tableau*, excepto na fórmula $\neg([\varphi]^x_y)$ referida;
- $\varphi \notin \{\forall x\, \psi : x \in X, \psi \in Form\} \cup \{\neg(\exists x\, \psi) : x \in X, \psi \in Form\}$. □

Um ramo de um *tableau* de $\mathcal{T}$ é esgotado se verifica todas as condições já exigidas no caso de *tableaux* de $\mathcal{T}_p$, mas agora existem mais condições. Exige-se também que em $Form(r)$ não exista nenhuma fórmula do tipo $\forall x\, \psi$ nem do tipo $\neg(\exists x\, \psi)$ e ainda que se em $Form(r)$ existe uma fórmula do tipo $\exists x\, \varphi$ ou $\neg(\forall x\, \varphi)$ então em $Form(r)$ existe também $[\varphi]^x_y$ ou $\neg([\varphi]^x_y)$, respectivamente, para alguma variável y que não ocorra em mais nenhuma fórmula do *tableau*.

Exemplo 4.2 O ramo do *tableau* t_3 apresentado no Exemplo 1.6 é um ramo esgotado. O ramo do *tableau* t_4 apresentado no mesmo Exemplo não é um ramo esgotado porque contém a fórmula $\forall y Q(z, y)$. Por um motivo semelhante também não são esgotados os ramos do *tableau* t_5 no mesmo Exemplo.

Considere-se agora o *tableau* t_6:

$$\cfrac{\neg((\exists x\, Q(x)) \rightarrow (\forall x\, Q(x)))}{\cfrac{\exists x\, Q(x),\ \neg(\forall x\, Q(x))}{\cfrac{Q(y)}{\neg Q(z)}\ \neg\forall}\ \exists}\ \neg\rightarrow$$

O ramo deste *tableau* é também um ramo esgotado. $\square$

Enuncia-se agora o resultado que descreve como a partir de ramos esgotados de um *tableau* de $\mathcal{T}$ se obtém uma interpretação que satisfaz o conjunto associado à raiz do *tableau*.

Recorde-se que se considera fixado um alfabeto de primeira ordem *Alf* com conjunto de símbolos de função *SF*, conjunto de símbolos de predicado *SP* e conjunto de variáveis *X*.

Proposição 4.3 Seja r um ramo aberto e esgotado de um *tableau* de $\mathcal{T}$ para Φ. Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathbb{M} = (U, I)$ tal que

- U é o menor conjunto que verifica as seguintes condições
  - todos termos que ocorrem nas fórmulas em $\mathit{Form}(r)$ pertencem a U
  - todas os símbolos de constante em SF pertencem a U
  - para cada símbolo de função em SF com aridade $n \geq 0$ e termos $t_1, \dots, t_n \in U$, $f(t_1, \dots t_n) \in U$
- para cada símbolo de constante c em SF, $c_{\mathbb{M}} = c$
- para cada símbolo de função f em SF com aridade $n \geq 0$ e termos $t_1, \dots, t_n \in U$, $f_{\mathbb{M}} : U^n \to U$ é $f_{\mathbb{M}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$
- para cada símbolo proposicional em SP, $P_{\mathbb{M}} = 0$ se $\neg P \in \mathit{Form}(r)$ e $P_{\mathbb{M}} = 1$ caso contrário
- para cada símbolo de predicado P em SP com aridade $n \geq 0$ e termos $t_1, \dots, t_n \in U$, $P_{\mathbb{M}} : U^n \to \{0, 1\}$ é tal que $P_{\mathbb{M}}(t_1, \dots, t_n) = 0$ se $\neg(P(t_1, \dots, t_n)) \in \mathit{Form}(r)$ e $P_{\mathbb{M}}(t_1, \dots, t_n) = 1$ caso contrário.

A interpretação $\mathbb{M}$ com uma atribuição ρ tal que $\rho(x) = x$ para cada variável $x \in U$ satisfaz o conjunto Φ.

Prova (esboço): Deixa-se como exercício verificar que com a interpretação $\mathbb{M}$ e atribuição ρ referidas se tem que $[\![t]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}} = t$ para cada termo t que ocorre nalguma fórmula em $\mathit{Form}(r)$.

Prova-se que a interpretação $\mathbb{M}$ com a atribuição ρ satisfaz o conjunto $\mathit{Form}(r)$.

O primeiro passo da prova consiste em provar que a interpretação $\mathbb{M}$ com a atribuição ρ satisfaz todas as fórmulas atómicas e negações de fórmulas atómicas presentes em $\mathit{Form}(r)$.

- Se $P \in \mathit{Form}(r)$ é um símbolo proposicional, como r é ramo aberto, $\neg P \notin \mathit{Form}(r)$, logo $P_{\mathbb{M}} = 1$ e portanto $[\![P]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}} = 1$; se $\neg P \in \mathit{Form}(r)$ então, pela definição de $\mathbb{M}$, $P_{\mathbb{M}} = 0$, pelo que $[\![\neg P]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}} = 1$.
- Se $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathit{Form}(r)$, como r é ramo aberto, $\neg P(t_1, \dots, t_n) \notin \mathit{Form}(r)$ pelo que $[\![P(t_1, \dots, t_n)]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}} = P_{\mathbb{M}}([\![t_1]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}}, \dots, [\![t_n]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}}) = P_{\mathbb{M}}(t_1, \dots, t_n) = 1$; se $\neg P(t_1, \dots, t_n) \in \mathit{Form}(r)$, então, pela definição de $\mathbb{M}$, $P_{\mathbb{M}}(t_1, \dots, t_n) = 0$ pelo que $[\![\neg P(t_1, \dots, t_n)]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}} = 1$

Se $P(t_1) \wedge Q(t_2) \in \mathit{Form}(r)$, por exemplo, por definição de ramo esgotado, $P(t_1) \in \mathit{Form}(r)$ e $Q(t_2) \in \mathit{Form}(r)$ pelo que $[\![P(t_1)]\!]^{\rho}_{I\!M} = [\![Q(t_2)]\!]^{\rho}_{I\!M} = 1$. Assim $[\![P(t_1) \wedge Q(t_2)]\!]^{\rho}_{I\!M} = 1$.

Se $\exists x P(x) \in \mathit{Form}(r)$, por exemplo, então, por definição de ramo esgotado, $[P(x)]^x_y \in \mathit{Form}(r)$ em que y é uma variável que apenas ocorre em $[P(x)]^x_y$ $(= P(y))$. Então $[\![[P(x)]^x_y]\!]^{\rho}_{I\!M} = 1$, isto é, tendo em conta a definição de ρ, $[\![[P(x)]^x_y]\!]^{\rho}_{I\!M} = [\![P(y)]\!]^{\rho}_{I\!M} = P_{I\!M}(y^{\rho}_{I\!M}) = P_{I\!M}(y) = 1$. Por definição de $I\!M$, $y \in U$ e tem-se que $[\![P(x)]\!]^{\rho[x:=y]}_{I\!M} = P_{I\!M}([\![x]\!]^{\rho[x:=y]}_{I\!M}) = P_{I\!M}(y) = 1$. Assim, $[\![\exists x P(x)]\!]^{\rho}_{I\!M} = 1$.

Raciocinando de modo análogo para as outras fórmula em $\mathit{Form}(r)$ pode concluir-se que $I\!M, \rho \models \mathit{Form}(r)$. Note-se que uma prova rigorosa do resultado aqui enunciado deverá ser feita por indução no número de conectivos e quantificadores das fórmulas.

Finalmente, como $\Phi \subseteq \mathit{Form}(r)$ tem-se que $I\!M, \rho \models \Phi$. □

Exemplo 4.4 Considere-se o *tableau* apresentado no Exemplo 4.2. A partir do seu ramo esgotado, pode considerar-se interpretação construída como indicado na Proposição 4.3, na qual, em particular, $\{x, y, z\} \subseteq U$. Tem-se também que $Q_{I\!M}(y) = 1$ e $Q_{I\!M}(z) = 0$. Esta interpretação com a atribuição ρ tal que $\rho(x) = x$, $\rho(y) = y$ e $\rho(z) = z$, satisfaz a fórmula que constitui a raiz do *tableau* em causa. □

5 Completude do sistema $\mathcal{T}$

Na secção 2 provou-se que se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$, isto é, se existe um *tableau* fechado para $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\neg\varphi\}$ então φ é consequência semântica do conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Em particular, se existe um *tableau* fechado para $\{\neg\varphi\}$ então φ é fórmula válida.

Nesta secção estabelecem-se as afirmações recíprocas, isto é, se φ é consequência semântica do conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ então existe um *tableau* fechado para $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\neg\varphi\}$ e portanto, em particular, se φ é fórmula válida então existe um *tableau* fechado para $\{\neg\varphi\}$.

Proposição 5.1

1. Se $\models \varphi$ então $\vdash_{\mathcal{T}} \varphi$.
2. Se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash_{\mathcal{T}} \varphi$.

Prova (esboço): Refere-se apenas a prova para o caso de $\mathcal{T}_p$. Neste caso, facilmente se conclui que para cada conjunto finito Ψ de fórmulas é possível construir um *tableau* em que todos os ramos são esgotados. Se todos os ramos são fechados, então Ψ é um conjunto impossível (Proposição 2.3). Caso contrário, existe um ramo esgotado aberto, pelo que Ψ é conjunto possível (Proposição 4.3).

Assim, se $\models \varphi$, considerando o conjunto $\{\neg\varphi\}$, é sempre possível construir um *tableau* para $\{\neg\varphi\}$ com todos os ramos esgotados. Não pode existir nenhum ramo aberto neste *tableau* pois, caso contrário, $\{\neg\varphi\}$ seria possível, o que contraria a hipótese de que $\models \varphi$. Logo o *tableau* é fechado. Idêntico raciocínio se pode fazer para o caso em que $\Phi \models \varphi$. □