1 Sistema dedutivo $\mathcal{R}$

Apresenta-se na sequência o sistema dedutivo $\mathcal{R}$, também designado *resolução*. Neste sistema dedutivo existe apenas uma regra de inferência, a regra da resolução. Este sistema manipula fórmulas na forma normal conjuntiva. Embora o sistema $\mathcal{R}$ também se possa utilizar no caso da lógica de primeira ordem, trata-se aqui apenas o caso proposicional.

Considera-se fixado o fragmento proposicional do alfabeto de primeira ordem *Alf* , sendo *Prop* o conjunto dos símbolos proposicionais.

Definição 1.1 LITERAIS E LITERAIS COMPLEMENTARES
Um literal é um símbolo em *Prop* ou a negação de um símbolo em *Prop* .

O literal complementar de $P \in \mathit{Prop}$ é $\neg P$ e o literal complementar do literal $\neg P$ é P. Dado um literal L, $\overline{L}$ denota o seu complementar. □

Definição 1.2 FORMA NORMAL CONJUNTIVA
Uma fórmula está na forma normal conjuntiva (FNC) se é uma conjunção de disjunções de literais, isto é, é

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$$

em que, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\varphi_i = L_1^i \vee \ldots \vee L_{k_i}^i$$

e $L_i^i, \ldots, L_{k_i}^i$ são literais. Cada φ_i é uma cláusula e se, em particular, tiver um único literal é uma cláusula unitária.

Usa-se também a notação

$$\{\{L_1^1, \ldots, L_{k_1}^1\}, \ldots, \{L_1^n, \ldots, L_{k_n}^n\}\}$$

para representar fórmulas na forma normal conjuntiva. Nesta notação, uma cláusula é um conjunto de literais e uma fórmula na FNC é um conjunto de cláusulas. □

Considera-se também o caso particular da cláusula vazia (conjunto vazio de literais). A cláusula vazia é aqui representada por $\perp$. Uma cláusula vazia (disjunção vazia) representa uma fórmula constraditória.

Considera-se também o caso particular de uma conjunção de cláusulas vazia (conjunto vazio de cláusulas). A conjunção vazia representa uma fórmula válida.

Exemplo 1.3 Sejam P, Q, R e S símbolos proposicionais.

- A fórmula $P \vee (\neg Q) \vee R$ é uma cláusula.

  Pode ser representada por $\{P, \neg Q, R\}$.

- A fórmula $(P \vee (\neg Q) \vee R) \wedge ((\neg Q) \vee S) \wedge (S \vee R)$ está na forma normal conjuntiva.

  Pode ser representada por $\{\{P, \neg Q, R\}, \{\neg Q, S\}, \{S, R\}\}$. □

Qualquer fórmula pode ser transformada numa fórmula equivalente na FNC usando as equivalências válidas

- $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$
- $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$
- $(\neg(\neg\varphi)) \leftrightarrow \varphi$
- $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow ((\neg\varphi) \vee \psi)$
- $(\neg(\varphi \vee \psi)) \leftrightarrow ((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$
- $(\neg(\varphi \wedge \psi)) \leftrightarrow ((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$
- $(\gamma \vee (\varphi \wedge \psi)) \leftrightarrow ((\gamma \vee \varphi) \wedge (\gamma \vee \psi))$
- $(\gamma \wedge (\varphi \vee \psi)) \leftrightarrow ((\gamma \wedge \varphi) \vee (\gamma \wedge \psi))$

Apresenta-se agora o sistema dedutivo.

SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{R}$

REGRA DE INFERÊNCIA

- Regra *res*

$$\frac{\{L_1, \ldots, L_n, P\} \qquad \{L'_1, \ldots, L'_m, \neg P\}}{\{L_1, \ldots, L_n, L'_1, \ldots, L'_m\}}\ res$$

em que se assume que $\{L_1, \ldots, L_n, P\}$ e $\{L'_1, \ldots, L'_m, \neg P\}$ são cláusulas. $\square$

Denota-se por

$$res(\{L_1, \ldots, L_n, P\}, \{L'_1, \ldots, L'_m, \neg P\})$$

a cláusula

$$\{L_1, \ldots, L_n, L'_1, \ldots, L'_m\}$$

a qual é também designada resolvente de $\{L_1, \ldots, L_n, P\}$ e $\{L'_1, \ldots, L'_m, \neg P\}$.

Segue-se a definição de derivação em $\mathcal{R}$.

Definição 1.4 DERIVAÇÃO EM $\mathcal{R}$
Uma derivação de uma cláusula C a partir de um conjunto de cláusulas $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é uma sequência de cláusulas

$$C_1 C_2 \ldots C_n$$

$n \geq 1$, tal que $C = C_n$ e, para cada $1 \leq i \leq n$, $C_i \in \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ ou C_i obtém-se por aplicação da regra *res* a C_{j_1} e C_{j_2} com $1 \leq j_1, j_2 < i$.

Usa-se a notação

$$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \vdash_{\mathcal{R}} C$$

para afirmar que existe uma derivação da cláusula C a partir do conjunto de cláusulas $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$. □

Exemplo 1.5 A sequência sequinte é uma derivação em $\mathcal{R}$ de $\{P_4\}$ a partir de $H = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{\neg P_2, P_4\}, \{\neg P_1, P_4\}, \{\neg P_3, P_4\}\}$:

1. $\{P_1, P_2, P_3\}$ — cláusula em H
2. $\{\neg P_2, P_4\}$ — cláusula em H
3. $\{P_1, P_3, P_4\}$ — *res* 1, 2
4. $\{\neg P_1, P_4\}$ — cláusula em H
5. $\{P_3, P_4\}$ — *res* 3, 4
6. $\{\neg P_3, P_4\}$ — cláusula em H
7. $\{P_4\}$ — *res* 5, 6

□

Definição 1.6 CONJUNTO INCOERENTE
Um conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$ diz-se incorente se

$$\{C_1, C_2, \ldots, C_n\} \vdash_{\mathcal{R}} \perp.$$

Uma derivação de $\perp$ a partir $\{C_1, \ldots, C_n\}$ é uma *refutação* do conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$ em $\mathcal{R}$. □

Exemplo 1.7 A sequência sequinte é uma derivação em $\mathcal{R}$ da cláusula vazia, $\perp$, a partir de $H = \{\{\neg P_1, P_2, P_3\}, \{\neg P_4, P_2\}, \{P_1, P_4\}, \{\neg P_2\}, \{\neg P_3\}\}$:

1. $\{\neg P_1, P_2, P_3\}$ — cláusula em H
2. $\{P_1, P_4\}$ — cláusula em H
3. $\{P_2, P_3, P_4\}$ — *res* 1, 2
4. $\{\neg P_3\}$ — cláusula em H
5. $\{P_2, P_4\}$ — *res* 3, 4
6. $\{\neg P_4, P_2\}$ — cláusula em H
7. $\{P_2\}$ — *res* 5, 6
8. $\{\neg P_2\}$ — cláusula em H
9. $\perp$ — *res* 7, 8

O conjunto de cláusulas H é assim incoerente. □

2 Correcção do sistema $\mathcal{R}$

Seguem-se agora os resultados que relacionam derivações em $\mathcal{R}$ com consequência semântica.

Proposição 2.1 CORRECÇÃO DA REGRA DE INFERÊNCIA *res*
Tem-se que

$$C_1 \wedge C_2 \models res(C_1, C_2)$$

isto é, um resolvente das cláusulas C_1 e C_2 é consequência semântica de $C_1 \wedge C_2$.

Prova: Sejam $C_1 = \{L_1^1, \ldots, L_n^1, L\}$ e $C_2 = \{L_1^2, \ldots, L_m^2, \overline{L}\}$. Seja V uma valoração tal que $V \models C_1$ e $V \models C_2$. Então (i) $V \models L_1^j$, para algum $1 \leq j \leq n$, ou $V \models L$ e (ii) $V \models L_2^k$, para algum $1 \leq k \leq m$, ou $V \models \neg L$.

Se $V \models L$ então $V \models L_2^k$ e portanto $V \models res(C_1, C_2)$.

Se $V \models \overline{L}$ então $V \models L_1^j$ e portanto também $V \models res(C_1, C_2)$.

Conclui-se então que o resolvente de C_1 e C_2 é consequência semântica de $C_1 \wedge C_2$. □

Proposição 2.2 CORRECÇÃO DO SISTEMA DEDUTIVO $\mathcal{R}$
Se $\{C_1, \ldots, C_n\} \vdash_{\mathcal{R}} C$ então $\{C_1, \ldots, C_n\} \models C$,

Prova: O resultado é consequência da Definição 1.4 e da Proposição 2.1. □

A corecção do sistema $\mathcal{R}$ estabelece que se existe uma derivação em $\mathcal{R}$ da cláusula C a partir do conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$ então C é consequência semântica de $\{C_1, \ldots, C_n\}$.

Exemplo 2.3 Dada a derivação apresentada no Exemplo 1.5, tem-se que

$$\{\{P_1, P_2, P_3\}, \{\neg P_2, P_4\}, \{\neg P_1, P_4\}, \{\neg P_3, P_4\}\} \models P_4$$

, isto é, a cláusula $\{P_4\}$ (ou seja, a fórmula P_4) é consequência semântica do conjunto de cláusulas $H = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{\neg P_2, P_4\}, \{\neg P_1, P_4\}, \{\neg P_3, P_4\}\}$. □

Como Corolário da Proposição 2.2 tem-se que se existe uma derivação de $\perp$ (cláusula vazia) a partir do conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$ então a fórmula $\{C_1, \ldots, C_n\}$ é contraditória.

Se, em particular, existe uma derivação de $\perp$ a partir do conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n, \{L_1, \ldots, L_k\}\}$, ou seja, se $\{C_1, \ldots, C_n, \{L_1, \ldots, L_k\}\}$ é um conjunto incoerente, então este conjunto é contraditório (ou, equivalentemente, a fórmula representada por este conjunto é contraditória). Assim, não existe nenhuma valoração que satisfaça todas as fórmulas do conjunto. Consequentemente cada valoração que satisfaça as cláusulas em $\{C_1, \ldots, C_n\}$ satisfaz necessariamente $(\neg L_1) \wedge \ldots \wedge (\neg L_k)$ e portanto esta fórmula é consequência semântica de $\{C_1, \ldots, C_n\}$.

Se existe uma derivação da cláusula vazia a partir do conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n, \{\neg P\}\}$, em que P é um símbolo proposicional, P é então consequência semântica de $\{C_1, \ldots, C_n\}$.

Corolário 2.4

- Se $\{C_1, \ldots, C_n\} \vdash_{\mathcal{R}} \perp$ então $\{C_1, \ldots, C_n\}$ é fórmula contraditória.
- Se $\{C_1, \ldots, C_n, \{L_1, \ldots, L_k\}\} \vdash_{\mathcal{R}} \perp$ então $\{C_1, \ldots, C_n\} \models (\overline{L}_1) \wedge \ldots \wedge (\overline{L}_k)$.
- Se $\{C_1, \ldots, C_n, \{\neg P\}\} \vdash_{\mathcal{R}} \perp$ então $\{C_1, \ldots, C_n\} \models P$. □

Exemplo 2.5 A sequência sequinte é uma derivação em $\mathcal{R}$ de $\perp$ a partir de $H = \{\{\neg P_1, P_2, P_3\}, \{\neg P_4, P_2\}, \{P_1, P_4\}, \{\neg P_2\}, \{\neg P_3\}\}$:

1. $\{\neg P_1, P_2, P_3\}$ — cláusula em H
2. $\{P_1, P_4\}$ — cláusula em H
3. $\{P_2, P_3, P_4\}$ — *res* 1, 2
4. $\{\neg P_3\}$ — cláusula em H
5. $\{P_2, P_4\}$ — *res* 3, 4
6. $\{\neg P_4, P_2\}$ — cláusula em H
7. $\{P_2\}$ — *res* 5, 6
8. $\{\neg P_2\}$ — cláusula em H
9. $\perp$ — *res* 7, 8

Neste caso pode então concluir-se que P_2 é consequência semântica de H. □