1 Lógica de primeira ordem

1.1 Sintaxe

Para definir uma linguagem de primeira ordem é necessário dispor de um alfabeto. Este alfabeto introduz os símbolos à custa dos quais são construídos os termos e as fórmulas dessa linguagem.

Definição 1.1 Alfabeto de primeira ordem
Um alfabeto de primeira ordem é composto de:

- um conjunto SF de símbolos de função e um conjunto SP de símbolos de predicado, disjuntos, juntamente com as respectivas aridades, uma função $\tau : SF \cup SP \to I\!N_0$
- um conjunto numerável X de variáveis
- os conectivos $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção) e $\to$ (implicação),
- o quantificador universal $\forall$ e o quantificador existencial $\exists$
- os símbolos de pontuação (e) (parêntese esquerdo e parêntese direito) e , (vírgula). $\square$

O valor que a função τ atribui a cada símbolo de função ou de predicado designa-se aridade do símbolo. Os símbolos de função de aridade 0 são designados *símbolos de constante*. Os símbolos de predicado de aridade 0 são designados *símbolos proposicionais*.

É possível considerar fragmentos de um alfabeto de primeira ordem. Pode considerar-se por exemplo o fragmento em que $\neg$ e $\to$ são os únicos conectivos e $\forall$ o único quantificador. Um outro exemplo, designado *fragmento proposicional*, é constituído apenas por conectivos, símbolos de predicado de aridade 0 (símbolos proposicionais) e parênteses.

Exemplo 1.2 Considerem-se os conjuntos

- $SF = \{\odot, s, q\}$
- $SP = \{S, T, Q, M\}$
- $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

e a função $\tau : SF \cup SP \to I\!N_0$ com

- $\tau(\odot) = \tau(S) = \tau(T) = 0$
- $\tau(s) = \tau(q) = \tau(Q) = 1$
- $\tau(M) = 2$.

Os conjuntos *SF*, *SP* e X acima mencionados, juntamente com os conectivos, quantificadores e símbolos de pontuação referidos na Definição 1.1, constituem um alfabeto de primeira ordem. A aridade do símbolo de função $\odot$ é 0 (e portanto $\odot$ é um símbolo de constante) e a aridade dos símbolos de função s e q é 1. A aridade dos símbolos de predicado S e T é 0 (e portanto S e T são símbolos proposicionais). A aridade do símbolo de predicado Q é 1 e a aridade do símbolo de predicado M é 2.

O fragmento proposicional deste alfabeto é constituído pelos símbolos S e T, pelos conectivos e pelos parênteses. $\square$

Considera-se fixado um alfabeto de primeira ordem *Alf* com conjunto de símbolos de função *SF*, conjunto de símbolos de predicado *SP* e conjunto de variáveis X.

Dado um alfabeto de primeira ordem, certas sequências de símbolos do alfabeto são designadas termos. Termos são variáveis, constantes e símbolos de função aplicados a outros termos. Os termos representam as entidades cujas propriedades podem ser descritas ou especificadas através das fórmulas.

Definição 1.3 TERMOS
A linguagem dos termos, ou conjunto dos termos, sobre o alfabeto *Alf* designa-se *Term* e é o conjunto de sequências geradas pela gramática com produções:

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\mathit{termo}} \to \underline{\mathit{var}} \mid \underline{\mathit{sf0}} \mid \underline{\mathit{sf1}}(\underline{\mathit{termo}}) \mid \underline{\mathit{sf2}}(\underline{\mathit{termo}}, \underline{\mathit{termo}}) \mid \ldots & \\
\underline{\mathit{var}} \to x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \ldots & \text{(cada uma das variáveis)} \\
\underline{\mathit{sf0}} \to f_1^0 \mid f_2^0 \mid f_3^0 \mid \ldots & \text{(cada um dos símbolos de função com aridade 0)} \\
\underline{\mathit{sf1}} \to f_1^1 \mid f_2^1 \mid f_3^1 \mid \ldots & \text{(cada um dos símbolos de função com aridade 1)} \\
\underline{\mathit{sf2}} \to f_1^2 \mid f_2^2 \mid f_3^2 \mid \ldots & \text{(cada um dos símbolos de função com aridade 2)} \\
\ldots &
\end{array}
$$

e em que $\underline{\mathit{termo}}, \underline{\mathit{var}}, \underline{\mathit{sf0}}, \underline{\mathit{sf1}}, \underline{\mathit{sf2}}, \ldots$ são os símbolos não terminais, $X \cup SF \cup \{,,(,)\}$ são os símbolos terminais e $\underline{\mathit{termo}}$ é o símbolo inicial. $\square$

Um termo diz-se *fechado* se nele não ocorrem variáveis.

Exemplo 1.4 Considerando o alfabeto do Exemplo 1.2, tem-se que $\odot$, x_1, $s(\odot)$, $q(x_2)$, $s(q(x_3))$ são exemplos de elementos de *Term*, sendo $\odot$ e $s(\odot)$ termos fechados. Os outros termos não são fechados. $\square$

As fórmulas são também sequências de símbolos do alfabeto, construídas segundo regras apropriadas. As fórmulas representam asserções acerca das entidades representadas pelos termos.

Definição 1.5 FÓRMULAS
A linguagem das fórmulas de primeira ordem, ou conjunto das fórmulas de primeira ordem, sobre o alfabeto *Alf* designa-se *Form* e é o conjunto de sequências geradas pela gramática que inclui todas as produções da gramática que gera a linguagem dos termos e também:

$$\underline{form} \rightarrow \underline{formatomica} \mid (\neg\underline{form}) \mid (\underline{form} \wedge \underline{form}) \mid (\underline{form} \vee \underline{form}) \mid$$
$$(\underline{form} \rightarrow \underline{form}) \mid (\underline{quant}\ \underline{var}\ \underline{form})$$

$$\underline{formatomica} \rightarrow \underline{sp0} \mid \underline{sp1}(\underline{termo}) \mid \underline{sp2}(\underline{termo}, \underline{termo}) \mid \ldots$$

$$\underline{quant} \rightarrow \forall \mid \exists$$

$\underline{var} \rightarrow x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \ldots$ (cada uma das variáveis)

$\underline{sp0} \rightarrow P^0_1 \mid P^0_2 \mid P^0_3 \mid \ldots$ (cada um dos símbolos de predicado com aridade 0)

$\underline{sp1} \rightarrow P^1_1 \mid P^1_2 \mid P^1_3 \mid \ldots$ (cada um dos símbolos de predicado com aridade 1)

$\underline{sp2} \rightarrow P^2_1 \mid P^2_2 \mid P^2_3 \mid \ldots$ (cada um dos símbolos de predicado com aridade 2)

$\ldots$

e em que $\underline{form}, \underline{formatomica}, \underline{quant}, \underline{termo}, \underline{var}, \underline{sf0}, \underline{sf1}, \ldots, \underline{spf0}, \underline{sp1}, \ldots$, são os símbolos não terminais, os símbolos terminais são todos os símbolos de *Alf* e *form* é o símbolo inicial. □

É usual omitirem-se os parênteses mais exteriores das fórmulas.

As fórmulas nas quais apenas ocorrem termos e símbolos de predicado são designadas *fórmulas atómicas.*

As fórmulas nas quais ocorrem apenas símbolos de predicado de aridade 0 (símbolos proposicionais) e conectivos são *fórmulas proposicionais.* Para construir estas fórmulas são apenas necessários símbolos do fragmento proposicional do alfabeto de primeira ordem.

Cada subsequência de φ que seja ela própria uma fórmula em *Form* diz-se *subfórmula* de φ.

Exemplo 1.6 Considerando o alfabeto do Exemplo 1.2 tem-se que

- S
- $Q(\odot)$
- $M(x_1, x_2)$
- $S \rightarrow T$
- $Q(s(x_1)) \wedge M(q(s(x_2)), s(x_1))$
- $\forall x_1\, Q(x_1)$
- $\exists x_3\, (M(x_3, \odot) \wedge Q(x_3))$

são exemplos de fórmulas em *Form.* As três primeiras são fórmulas atómicas. A primeira e a terceira são fórmulas proposicionais.

A fórmula $\exists x_3\, (M(x_3, \odot) \wedge Q(x_3))$ tem quatro subfórmulas: $M(x_3, \odot) \wedge Q(x_3)$, $M(x_3, \odot)$, $Q(x_3)$ e $\exists x_3\, (M(x_3, \odot) \wedge Q(x_3))$.

$M(x_1, x_2)$ é a única subfórmula de $M(x_1, x_2)$. □

O conectivo $\leftrightarrow$ é aqui definido como abreviatura:

$$\varphi \leftrightarrow \varphi' =_{abv} (\varphi \rightarrow \varphi') \wedge (\varphi' \rightarrow \varphi)$$

Uma dada variável pode ocorrer várias vezes numa fórmula. Na fórmula $\exists x_3\,(M(x_3, \odot) \wedge Q(x_3))$, por exemplo, existem três ocorrências da variável x_3.

Diz-se que uma ocorrência da variável $x \in X$ numa fórmula $\varphi \in Form$ *está no alcance de uma quantificação* $\forall y$ se essa ocorrência está numa subfórmula de φ do tipo $\forall y\, \psi$. *Mutatis mutandis* para para o caso da quantificação $\exists y$.

Diz-se que uma ocorrência da variável $x \in X$ numa fórmula $\varphi \in Form$ é uma ocorrência *muda* se está no alcance de uma quantificação $\forall x$ ou de uma quantificação $\exists x$. Se uma ocorrência da variável $x \in X$ numa fórmula $\varphi \in Form$ não é muda, diz-se que é ocorrência *livre*.

A fórmula $\varphi \in Form$ diz-se *fechada* se nenhuma variável tem ocorrências livres em φ. Caso contrário diz-se fórmula *aberta*.

Exemplo 1.7

- Na fórmula $\exists x_3\,(M(x_3, \odot) \wedge Q(x_3))$ existem três ocorrências da variável x_3. Todas essas ocorrências estão no alcance de uma quantificação $\exists x_3$. Todas as ocorrências são mudas. Esta fórmula é fechada.

- A segunda ocorrência de x_1 e a terceira ocorrência de x_1 na fórmula $M(q(s(x_2)), s(x_1)) \wedge (\forall x_1\, Q(x_1))$ estão no alcance de uma quantificação $\forall x_1$. Estas ocorrências são mudas. A primeira ocorrência de x_1 é livre e a ocorrência de x_2 é também livre. Esta fórmula é aberta.

- As ocorrência das variáveis x_1 e x_2 na fórmula $Q(s(x_1)) \wedge M(q(s(x_2)), s(x_1))$ são livres. Esta fórmula é aberta.

- As duas ocorrências da variável x_1 na fórmula $\forall x_1\,(M(q(s(x_2)), s(x_1)))$ estão no alcance de uma quantificação $\forall x_1$. São assim ocorrências mudas. A ocorrência da variável x_2 está também no alcance de uma quantificação $\forall x_1$ e é uma ocorrência livre (dado que não está no alcance de uma quantificação $\forall x_2$ ou $\exists x_2$). Esta fórmula é aberta. $\square$

As ocorrências de variáveis em termos podem ser substituídas por outros termos. As ocorrências (livres) de variáveis em fórmulas podem ser substituídas por termos.

Definição 1.8 Substituição em termo
Para cada $t, s \in Term$ e $x \in X$, o termo que se obtém por substituição de x por t em s denota-se $(s)\,{}^{x}_{t}$ e define-se indutivamente como se segue.

- $(x)\,{}^{x}_{t} = t$

- $(v)\,{}^{x}_{t} = v$ se $v \in X \backslash \{x\}$

- $(c)\,{}^{x}_{t} = c$ para cada símbolo de constante c

- $(f(t_1,\ldots,t_n))\,{}^x_t = f((t_1)\,{}^x_t,\ldots,(t_n)\,{}^x_t)$
  se $t_1,\ldots,t_n \in \mathit{Term}$ e $f \in \mathit{SF}$ tem aridade $n > 0$. $\square$

Definição 1.9 Substituição em fórmula
Para cada $\varphi \in \mathit{Form}$, $t \in \mathit{Term}$ e $x \in X$, a fórmula que se obtém por substituição de x por t em φ denota-se por $(\varphi)\,{}^x_t$ e define-se indutivamente como se segue.

- $(P)\,{}^x_t = P$ para cada símbolo proposicional P
- $(P(t_1,\ldots,t_n))\,{}^x_t = P((t_1)\,{}^x_t,\ldots,(t_n)\,{}^x_t)$
  se $t_1,\ldots,t_n \in \mathit{Term}$ e $P \in \mathit{SP}$ tem aridade $n > 0$
- $(\forall x\,\varphi)\,{}^x_t = \forall x\,\varphi$
- $(\forall v\,\varphi)\,{}^x_t = \forall v\,(\varphi)\,{}^x_t$ se $v \in X \backslash \{x\}$
- $(\exists x\,\varphi)\,{}^x_t = \exists x\,\varphi$
- $(\exists v\,\varphi)\,{}^x_t = \exists v\,(\varphi)\,{}^x_t$ se $v \in X \backslash \{x\}$
- $(\neg\varphi)\,{}^x_t = \neg(\varphi)\,{}^x_t$
- $(\varphi' \wedge \varphi'')\,{}^x_t = (\varphi')\,{}^x_t \wedge (\varphi'')\,{}^x_t$
- $(\varphi' \vee \varphi'')\,{}^x_t = (\varphi')\,{}^x_t \vee (\varphi'')\,{}^x_t$
- $(\varphi' \rightarrow \varphi'')\,{}^x_t = (\varphi')\,{}^x_t \rightarrow (\varphi'')\,{}^x_t$. $\square$

Note-se que da Definição 1.9 resulta que, ao substituir uma variável x por um termo numa fórmula, só nas ocorrências livres de x são efectivamente realizadas as substituições. Deste modo, se uma variável só ocorre muda numa fórmula, a sua substituição por um qualquer termo não modifica a fórmula de partida.

Exemplo 1.10 Sendo $t = q(x_2)$ e $t' = s(x_3)$ tem-se que

- $(s(x_1))\,{}^{x_1}_t = s(q(x_2))$
- $(\forall x_1\,(Q(x_1) \rightarrow M(x_1, s(x_2))))\,{}^{x_2}_t = \forall x\,(Q(x_1) \rightarrow M(x_1, s(q(x_2))))$
- $(\forall x_1\,(Q(x_1) \rightarrow M(x_1, s(x_2))))\,{}^{x_1}_t = \forall x_1\,(Q(x_1) \rightarrow M(x_1, s(x_2)))$
- $(Q(x_3) \wedge (\exists x_3\;M(q(x_3), x_1)))\,{}^{x_3}_t = Q(q(x_2)) \wedge (\exists x_3\;M(q(x_3), x_1))$
- $(Q(x_3) \wedge (\exists x_3\;M(q(x_3), x_1)))\,{}^{x_1}_{t'} = Q(x_3) \wedge (\exists x_3\;M(q(x_3), s(x_3)))$. $\square$

Existem situações em que não é desejável que certas ocorrências livres de variáveis sejam substituídos por determinados termos, pois tal pode alterar de modo não desejado a interpretação da fórmula (a interpretação das fórmulas, ou semântica das fórmulas, é estudada com detalhe na secção seguinte).

Um desses casos tem lugar quando se considera, por exemplo, a fórmula $\exists x_2\,M(x_2, x_1)$ e o termo $s(x_2)$. Quando se substitui x_1 por $s(x_2)$ nesta fórmula obtém-se a fórmula $\exists x_2\,M(x_2, s(x_2))$. Se se interpretar M como um predicado que exprima a usual relação “maior que” no conjunto dos números naturais, a fórmula $\exists x_2\, M(x_2, x_1)$ exprime que existe um natural maior que o representado por x_1 (o que é verificado no conjunto dos naturais qualquer que seja o natural representado por x_1). Se se interpretar s como a função que a cada natural faz corresponder o seu sucessor, $\exists x_2\, M(x_2, s(x_2))$ exprime que existe um natural que é maior que o seu sucessor (o que não é verificado no conjunto dos naturais). Assim parte-se de uma fórmula que representa uma afirmação verdadeira e obtém-se após a substituição uma que representa uma afirmação falsa.

Repare-se que a ocorrência de x_1 em $\exists x_2\, M(x_2, x_1)$ que vai ser substituída é, naturalmente, livre mas está no âmbito de uma quantificação $\exists x_2$. O termo que vai substituir t, $s(x_2)$ tem precisamente uma ocorrência de x_2. A fórmula de partida $\exists x_2\, M(x_2, x_1)$ é uma fórmula aberta pois a (única) ocorrência de x_1 é livre. No entanto, é muda a terceira ocorrência de x_2 em $\exists x_2\, M(x_2, s(x_2))$, a fórmula que resulta da substituição, e esta fórmula é fechada.

Situações indesejadas na substituição de x por t em φ como a se que acabou de descrever estão relacionadas precisamente com esta questão: na fórmula φ, uma ocorrência livre da variável x está no alcance de uma quantificação sobre uma variável que ocorre em t. Assim, em geral , só se permitem substituições quando tal problema não ocorre, caso em que se diz que o termo t é livre para x em φ.

Definição 1.11 Termo livre para variável numa fórmula
Para cada $\varphi \in \mathit{Form}$, $t \in \mathit{Term}$ e $x \in X$, o termo t diz-se livre para x em φ se nenhuma ocorrência livre de x em φ está no alcance de uma quantificação $\forall y$ ou de uma quantificação $\exists y$ em que y é uma variável que ocorre em t. □

Exemplo 1.12 Tem-se que

- $s(x_2)$ não é livre para x_1 em $\exists x_2\, M(x_2, x_1)$
- $s(x_1)$ e $s(x_3)$ são livres para x_1 em $\exists x_2\, M(x_2, x_1)$
- $s(x_1)$, $s(x_2)$ e $s(x_3)$ são livres para x_2 em $\exists x_2\, M(x_2, x_1)$
- $q(x_1)$ é livre para x_1 em $Q(x_1) \wedge (\forall x_2\, (Q(x_2) \to M(x_3, s(x_1))))$
- $q(x_2)$ não é livre para x_1 em $Q(x_1) \wedge (\forall x_2\, (Q(x_2) \to M(x_3, s(x_1))))$
- $q(x_2)$ é livre para x_1 em $Q(x_1) \wedge (\forall x_1\, (Q(x_1) \to M(x_3, s(x_2))))$
- $q(x_3)$ não é livre para x_2 em $\forall x_1\, (Q(x_1) \to (\forall x_3\, M(x_3, s(x_2))))$
- $q(x_3)$ é livre para x_3 em $\forall x_1\, (Q(x_1) \to (\forall x_3\, M(x_3, s(x_2))))$. □

De agora em diante usa-se a notação

$$[\varphi]_t^x$$

para representar o resultado de substituir a variável x pelo termo t em φ seguindo a Definição 1.9 *com t termo livre para x em φ*. Assim, sempre que se usar esta notação está implícito que t tem de ser termo livre para x em φ.

1.2 Semântica

Um alfabeto de primeira ordem introduz símbolos de função e de predicado, isto é, nomes de funções e de predicados. Esses símbolos ou nomes podem vir a ser interpretados de muitas formas diferentes, no sentido em que a cada um desses nomes se pode fazer corresponder uma certa função (total) ou predicado. Quando se faz corresponder a cada símbolo de função uma certa função e a cada símbolo de predicado um certo predicado (propriedade) está a definir-se uma estrutura de interpretação. As funções e predicados são definidos à custa de conjuntos, pelo que as estruturas de interpretação incluem também conjuntos. Na lógica de primeira ordem que é objecto de estudo neste texto, os símbolos de função e de predicado são interpretados como funções e predicados envolvendo apenas um conjunto. Assim, cada estrutura de interpretação inclui apenas um conjunto, designado domínio ou universo de interpretação. A interpretação de um termo numa estrutura de interpretação é um elemento desse domínio e a interpretação duma fórmula é uma afirmação sobre elementos desse domínio.

No entanto, se se considerar apenas o fragmento proposicional do alfabeto, não existem termos e só se podem construir fórmulas proposicionais. Havendo só fórmulas proposicionais não é necessário considerar um domínio, basta atribuir a cada símbolo proposicional um valor booleano. Assim, a semântica do fragmento proposicional é mais simples que no caso geral, razão pela qual é apresentada em primeiro lugar, na secção 1.2.1.

1.2.1 Fragmento proposicional

Apresentam-se nesta secção os detalhes da semântica do fragmento proposicional. Neste caso não se consideram símbolos de função, símbolos de predicado de aridade positiva e quantificadores.

Designa-se Prop o conjunto de símbolos proposicionais do alfabeto Alf (símbolos de predicado de aridade 0) e Form_p o conjunto das fórmulas proposicionais.

Definição 1.13 Estrutura de interpretação sobre *Prop*
Uma valoração, ou estrutura de interpretação, sobre Prop é uma função total

$$V : \mathit{Prop} \to \{0,1\}.$$

Dada uma valoração V, designa-se por V_F a sua extensão a Form_p definida indutivamente da seguinte forma:

$$V_F : \mathit{Form}_p \to \{0,1\}$$

tal que

- $V_F(P) = V(P)$ para cada $P \in \mathit{Prop}$
- $V_F(\varphi \wedge \varphi') = \begin{cases} 1 & \text{se } V_F(\varphi) = 1 \text{ e } V_F(\varphi') = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $V_F(\varphi \vee \varphi') = \begin{cases} 1 & \text{se } V_F(\varphi) = 1 \text{ ou } V_F(\varphi') = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $V_F(\varphi \to \varphi') = \begin{cases} 1 & \text{se } V_F(\varphi) = 0 \text{ ou } V_F(\varphi') = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $V_F(\neg\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{se } V_F(\varphi) = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ □

Note-se que no caso da implicação tem-se que $V_F(\varphi \to \varphi') = 0$ apenas se $V_F(\varphi) = 1$ e $V_F(\varphi') = 0$. Uma outra forma de definir $V_F(\varphi \to \varphi')$ é a seguinte: $V_F(\varphi \to \varphi') = 1$ se e só se sempre que $V_F(\varphi) = 1$ então $V_F(\varphi') = 0$.

Para simplificar a notação é usual escrever apenas $V(\varphi)$ em vez de $V_F(\varphi)$.

Definição 1.14 Satisfação
Dada uma valoração V sobre *Prop* e uma fórmula $\varphi \in Form_p$, diz-se que V satisfaz φ, o que se denota

$$V \models \varphi$$

se $V(\varphi) = 1$. Usa-se $V \not\models \varphi$ como abreviatura de "V não satisfaz φ", isto é, quando $V(\varphi) = 0$. Dado $\Phi \subseteq Form_p$, diz-se que V satisfaz Φ, o que se denota

$$V \models \Phi$$

se $V \models \varphi$ para toda a fórmula $\varphi \in \Phi$. □

Exemplo 1.15 Sejam $\{P, Q, R, S\} \subseteq$ *Prop* e V uma valoração sobre *Prop* tal que $V(P) = 1$, $V(Q) = 0$, $V(R) = 0$ e $V(S) = 1$. Tem-se que

- como $V(P) = 1$ então $V \models P$
- como $V(Q) = 0$ então $V \not\models Q$
- como $V(Q) = 0$ então $V(P \wedge Q) = 0$ e portanto $V \not\models P \wedge Q$
- como $V(S) = 1$ então $V(P \to S) = 1$ e portanto $V \models P \to S$
- como $V(R) = 0$ então $V(R \to Q) = 1$ e portanto $V \models R \to Q$
- como $V(R) = 0$ e $V(P \wedge Q) = 0$ então $V(R \vee (P \wedge Q)) = 0$
  e portanto $V \not\models R \vee (P \wedge Q)$. □

Definição 1.16 Fórmula possível, contraditória e válida
Seja $\varphi \in Form_p$.

- φ diz-se possível se existe uma valoração V sobre *Prop* que satisfaz φ
- φ diz-se contraditória (ou impossível) se nenhuma valoração sobre *Prop* satisfaz φ

- φ diz-se válida, o que se denota

$$\models \varphi$$

  se todas as valorações V sobre $Prop$ satisfazem φ. As fórmulas proposicionais válidas são também designadas tautologias.

Algumas destas noções podem ser estendidas a conjuntos de fórmulas. Sendo $\Phi \subseteq Form_p$, Φ diz-se possível se existe uma valoração V sobre $Prop$ que satisfaz todas as fórmulas em Φ. Caso contrário, isto é, se para cada valoração V sobre $Prop$ existe sempre uma fórmula em Φ que não é satisfeita por V, diz-se que Φ é conjunto contraditório (ou impossível). □

Definição 1.17 CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA
Sendo $\Phi \subseteq Form_p$, a fórmula $\varphi \in Form_p$ diz-se consequência semântica de Φ, o que se denota

$$\Phi \models \varphi$$

se para cada valoração V sobre $Prop$, se $V \models \Phi$ então $V \models \varphi$. □

Exemplo 1.18 Seja $\{P, Q, R, S\} \subseteq Prop$. Tem-se que

- são fórmulas possíveis
  - P
  - $P \wedge Q$
  - $R \vee (P \wedge Q)$
- são fórmulas contraditórias
  - $P \wedge (\neg P)$
  - $(R \rightarrow S) \wedge (R \wedge (\neg S))$
- são fórmulas válidas, ou tautologias
  - $P \vee (\neg P)$
  - $(P \wedge Q) \rightarrow Q$
- $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\} \models P \rightarrow R$
  ou seja, $P \rightarrow R$ é consequência semântica de $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R\}$. □

A proposição seguinte mostra que para determinar se uma fórmula proposicional φ é ou não satisfeita por uma dada valoração V, basta saber qual o valor que V atribui aos símbolos proposicionais presentes em φ. Isto significa que dadas duas valorações V e V' (sobre P), tem-se que se ambas atribuem os mesmos valores aos símbolos proposicionais presentes em φ então $V \models \varphi$ se e só se $V' \models \varphi$.

Proposição 1.19
Sejam V e V' duas valorações sobre $Prop$. Para cada $\varphi \in Form_p$, se para cada símbolo proposicional P que ocorre em φ se tem que $V(P) = V'(P)$ então $V \models \varphi$ se e só se $V' \models \varphi$. □

Uma consequência deste resultado é que, para determinar se uma fórmula é ou não válida, basta considerar um número finito de valorações. Mais precisamente, basta considerar 2^n valorações, onde n é o número de símbolos proposicionais distintos que ocorrem na fórmula.

Idênticas observações se podem fazer quando se considera o caso da consequência semântica.

1.2.2 Caso geral

Apresentam-se agora as estruturas de interpretação no caso geral. Recorde-se que se considera fixado um alfabeto de primeira ordem Alf com conjunto de símbolos de função SF, conjunto de símbolos de predicado SP e conjunto de variáveis X.

Um predicado Π de aridade n (ou n-ário), $n \in \mathbb{N}_0$, sobre um conjunto U é uma função total $\Pi : U^n \to \{0, 1\}$. U^0 representa um conjunto singular.

Definição 1.20 Estrutura de interpretação
Uma estrutura de interpretação sobre o alfabeto de primeira ordem Alf é um par

$$\mathbb{M} = (U, I)$$

onde

- U é um conjunto não vazio designado universo, domínio ou suporte, da estrutura
- I é uma função total, designada função de interpretação, que a cada símbolo em $SF \cup SP$ associa uma função total do seguinte modo
  - para cada símbolo de função f de aridade n, $I(f)$ é uma função total
  $$I(f) : U^n \to U$$
  - para cada símbolo de predicado P de aridade n, $I(P)$ é uma aplicação
  $$I(P) : U^n \to \{0, 1\}.$$

Para cada símbolo de função f de aridade 0, ou seja, para cada símbolo de constante f, $I(f)$ é uma aplicação que ao elemento do conjunto singular U^0 faz corresponder um elemento $u \in U$ (a interpretação do símbolo de constante f na estrutura de interpretação $\mathbb{M}$). É usual, nesta situação, escrever-se apenas $I(f)$ para denotar o elemento u.

De modo semelhante, para cada símbolo de predicado P de aridade 0, $I(P)$ denota um elemento de $\{0, 1\}$. Note-se que cada símbolo de predicado de aridade 0 é um símbolo proposicional e I é neste caso uma valoração proposicional.

Usam-se também as notações $f_{\mathbb{M}}$ e $P_{\mathbb{M}}$ para $I(f)$ e $I(P)$, respectivamente.

Exemplo 1.21 Considere-se o alfabeto apresentado no Exemplo 1.2. O par $\mathbb{M} = (\mathbb{Z}, I)$ onde, considerando as habituais operações de soma e multiplicação em $\mathbb{Z}$,

- $I(\odot) = 0$
- $I(s) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $I(s)(n) = n + 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$
- $I(q) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $I(q)(n) = n * n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$
- $I(Q) : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ tal que $I(Q)(n) = 1$ se n é um quadrado perfeito (ou seja, se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k * k$) e $I(Q)(n) = 0$ caso contrário
- $I(M) : \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1\}$ tal que $I(M)(n_1, n_2) = 1$ se n_1 é maior que n_2 e $I(M)(n_1, n_2) = 0$ caso contrário,

é uma estrutura de interpretação sobre o alfabeto considerado. Neste caso faz-se corresponder ao símbolo de constante $\odot$ o inteiro 0, ao símbolo de função s a função sucessor, ao símbolo de função q a função que associa a cada inteiro o seu quadrado, ao símbolo de predicado Q o predicado "é quadrado perfeito" e ao símbolo de predicado M o predicado "é maior do que".

Tendo em conta a notação acima referida, poder-se-ia também ter escrito

- $\odot_{\mathbb{M}} = 0$
- $s_{\mathbb{M}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $s_{\mathbb{M}}(n) = n + 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$
- $q_{\mathbb{M}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $q_{\mathbb{M}}(n) = n * n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$
- $Q_{\mathbb{M}} : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ tal que $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se n é um quadrado perfeito e $Q_{\mathbb{M}}(n) = 0$ caso contrário
- $M_{\mathbb{M}} : \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1\}$ tal que $M_{\mathbb{M}}(n_1, n_2) = 1$ se n_1 é maior que n_2 e $M_{\mathbb{M}}(n_1, n_2) = 0$ caso contrário.

Por ser mais simples, será esta a notação que se utilizará preferencialmente na sequência. $\square$

A semântica, ou significado, das fórmulas depende da interpretação dos termos. Uma estrutura de interpretação só fixa uma interpretação para os símbolos de função e de predicado. Como para além de símbolos de função um termo pode conter variáveis, para interpretar um termo é necessário atribuir também um valor às variáveis. É assim necessário introduzir a noção de atribuição (de valores às variáveis).

Considera-se fixada uma estrutura de interpretação $\mathbb{M} = (U, I)$ sobre Alf.

Definição 1.22 Atribuição
Uma atribuição de X em $\mathbb{M}$ é uma função total $\rho : X \to U$ que associa a cada variável um elemento do universo U.

Para cada $k \in U$, $\rho[x := k]$ é a atribuição que associa k à variável x e associa $\rho(v)$ a cada $v \in X \backslash \{x\}$. Estas atribuições dizem-se x-equivalentes a ρ. $\square$

Definição 1.23 Interpretação de termos
Seja ρ uma atribuição de X em $I\!M$. A interpretação dos termos em $I\!M$ com ρ é uma função

$$[\![.]\!]^{\rho}_{I\!M} : \mathit{Term} \to U$$

definida indutivamente como se segue:

- $[\![x]\!]^{\rho}_{I\!M} = \rho(x)$ se $x \in X$
- $[\![c]\!]^{\rho}_{I\!M} = c_{I\!M}$ se c é um símbolo de constante
- $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{\rho}_{I\!M} = f_{I\!M}([\![t_1]\!]^{\rho}_{I\!M}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\rho}_{I\!M})$ se f é um símbolo de função de aridade $n > 0$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathit{Term}$. □

Fixada uma estrutura de interpretação e uma atribuição nessa estrutura, a interpretação de cada termo é um valor do universo subjacente à estrutura de interpretação.

Exemplo 1.24 Considerem-se a estrutura de interpretação apresentada no Exemplo 1.21 e a atribuição ρ tal que $\rho(x_1) = 1$, $\rho(x_2) = 2$ e $\rho(x_3) = 3$. Tem-se que

- $[\![\odot]\!]^{\rho}_{I\!M} = \odot_{I\!M} = 0$;
- $[\![x_1]\!]^{\rho}_{I\!M} = \rho(x_1) = 1$;
- $[\![s(\odot)]\!]^{\rho}_{I\!M} = s_{I\!M}([\![\odot]\!]^{\rho}_{I\!M}) = s_{I\!M}(0) = 1$;
- $[\![q(x_2)]\!]^{\rho}_{I\!M} = q_{I\!M}([\![x_2]\!]^{\rho}_{I\!M}) = q_{I\!M}(2) = 4$;
- $[\![s(q(x_3))]\!]^{\rho}_{I\!M} = s_{I\!M}(q_{I\!M}([\![x_3]\!]^{\rho}_{I\!M})) = s_{I\!M}(q_{I\!M}(3)) = 10$. □

Definição 1.25 Satisfação por estrutura de interp. com atribuição
Seja ρ uma atribuição de X em $I\!M$. Denota-se também por $[\![.]\!]^{\rho}_{I\!M}$ a seguinte função, definida indutivamente sobre :

$$[\![.]\!]^{\rho}_{I\!M} : \mathit{Form} \to \{0, 1\}$$

tal que

- $[\![P]\!]^{\rho}_{I\!M} = P_{I\!M}$, para cada símbolo proposicional P
- $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{\rho}_{I\!M} = P_{I\!M}([\![t_1]\!]^{\rho}_{I\!M}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\rho}_{I\!M})$,
  para cada P símbolo de predicado de aridade $n > 0$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathit{Term}$
- $[\![\varphi \wedge \varphi']\!]^{\rho}_{I\!M} = \begin{cases} 1 & \text{se } [\![\varphi]\!]^{\rho}_{I\!M} = 1 \text{ e } [\![\varphi']\!]^{\rho}_{I\!M} = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $[\![\varphi \vee \varphi']\!]^{\rho}_{I\!M} = \begin{cases} 1 & \text{se } [\![\varphi]\!]^{\rho}_{I\!M} = 1 \text{ ou } [\![\varphi']\!]^{\rho}_{I\!M} = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $[\![\varphi \rightarrow \varphi']\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = \begin{cases} 1 & \text{se } [\![\varphi]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = 0 \text{ ou } [\![\varphi']\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $[\![\neg\varphi]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = \begin{cases} 1 & \text{se } [\![\varphi]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $[\![\forall x\ \varphi]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = \begin{cases} 1 & \text{se } [\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{I\!M\!I} = 1 \text{ para cada } u \in U \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

- $[\![\exists x\ \varphi]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = \begin{cases} 1 & \text{se } [\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{I\!M\!I} = 1 \text{ para algum } u \in U \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Diz-se que $I\!M\!I$ com ρ satisfaz $\varphi \in \mathit{Form}$, o que se denota

$$I\!M\!I, \rho \models \varphi$$

se $[\![\varphi]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = 1$. Usa-se $I\!M\!I, \rho \not\models \varphi$ sempre que $I\!M\!I$ com ρ não satisfaça φ, óu seja, sempre que $[\![\varphi]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = 0$.

Dado $\Phi \subseteq \mathit{Form}$, $I\!M\!I$ com ρ satisfaz Φ, o que se denota

$$I\!M\!I, \rho \models \Phi$$

se $I\!M\!I, \rho \models \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$. □

Pode também definir-se a noção de satisfação por estrutura de interpretação apenas.

Exemplo 1.26 Considerem-se a estrutura de interpretação apresentada no Exemplo 1.21 e a atribuição ρ tal que $\rho(x_1) = 1$, $\rho(x_2) = 2$ e $\rho(x_3) = 3$. Tem-se que

- $I\!M\!I, \rho \models Q(\odot)$ porque

  $$[\![Q(\odot)]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = Q_{I\!M\!I}([\![\odot]\!]^{\rho}_{I\!M\!I}) = Q_{I\!M\!I}(0) = 1$$

  pois 0 é um quadrado perfeito

- $I\!M\!I, \rho \not\models M(x_1, x_2)$ porque

  $$[\![M(x_1, x_2)]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = M_{I\!M\!I}([\![x_1]\!]^{\rho}_{I\!M\!I}, [\![x_2]\!]^{\rho}_{I\!M\!I}) = M_{I\!M\!I}(1, 2) = 0$$

  pois 1 não é maior que 2

- $I\!M\!I, \rho \not\models Q(s(x_1)) \wedge M(q(s(x_2)), s(x_1))$ porque

  $$[\![Q(s(x_1)) \wedge M(q(s(x_2)), s(x_1))]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = 0$$

  uma vez que $[\![Q(s(x_1))]\!]^{\rho}_{I\!M\!I} = Q_{I\!M\!I}([\![s(x_1)]\!]^{\rho}_{I\!M\!I}) = Q_{I\!M\!I}(2) = 0$

- $\mathbb{M}, \rho \not\models \forall x_1\, Q(x_1)$ pois
$$[\![Q(x_1)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_1:=5]} = 0$$
uma vez que
$$[\![Q(x_1)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_1:=5]} = Q_{\mathbb{M}}([\![x_1]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_1:=5]}) = Q_{\mathbb{M}}(5) = 0.$$

- $\mathbb{M}, \rho \models \exists x_3 (M(x_3, \odot) \wedge Q(x_3))$ porque
$$[\![M(x_3, \odot) \wedge Q(x_3)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_3:=4]} = 1$$
uma vez que
  - $[\![M(x_3)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_3:=4]} = M_{\mathbb{M}}([\![x_3]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_3:=4]}, [\![\odot]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_3:=4]}) = M_{\mathbb{M}}(4, 0) = 1$
  e
  - $[\![Q(x_3)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_3:=4]} = Q_{\mathbb{M}}([\![x_3]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x_3:=4]}) = Q_{\mathbb{M}}(4) = 1.$

- $\mathbb{M}, \rho \models \forall x_1\, Q(q(x_1))$, para cada atribuição ρ de X em $\mathbb{M}$. □

Note-se que da Definição 1.25 resulta que em fórmulas do tipo $\forall x\, \varphi$ há que garantir a satisfação de φ por $\mathbb{M}$ com $\rho[x := u]$ para cada $u \in U$, e portanto o valor de $\rho(x)$ não é, por si só, relevante. De igual modo, em fórmulas do tipo $\exists x\, \varphi$ há que garantir a satisfação de φ por $\mathbb{M}$ com uma atribuição $\rho[x := u]$ para algum $u \in U$, pelo que também neste caso o valor de $\rho(x)$ não é necessariamente relevante. Daqui resulta que os valores que uma atribuição ρ associa às variáveis que só têm ocorrências mudas numa fórmula φ são irrelevantes para a satisfação de φ por $\mathbb{M}$ com ρ.

As variáveis mudas são apenas auxiliares da quantificação e poderão ser trocadas por outras (se certas condições forem respeitadas) sem que seja modificada a satisfação ou não satisfação por $\mathbb{M}$ com ρ.

Naturalmente que o mesmo já não se passa relativamente às variáveis livres. Considerando, por exemplo, a fórmula $M(x_1, x_2)$ do Exemplo 1.26, tinha-se que $\mathbb{M}, \rho \not\models M(x_1, x_2)$ mas, se for considerada uma atribuição ρ' tal que $\rho'(x_1) = 4$ e $\rho'(x_2) = 2$ já se tem que $\mathbb{M}, \rho' \models M(x_1, x_2)$.

Definição 1.27 Fórmula possível e contraditória

- $\varphi \in$ *Form* diz-se possível se existe uma estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre *Alf* e uma atribuição ρ de X em $\mathbb{M}$ tal que $\mathbb{M}, \rho \models \varphi$

- $\varphi \in$ *Form* diz-se contraditória (ou impossível) se não é possível.

Estas noções podem ser estendidas também a conjuntos de fórmulas, da forma esperada. □

Definição 1.28 Validade de fórmula
A fórmula $\varphi \in$ *Form* diz-se válida, o que se denota
$$\models \varphi$$
se $\mathbb{M}, \rho \models \varphi$ quaisquer que sejam a estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre *Alf* e ρ atribuição de X em $\mathbb{M}$. □

Definição 1.29 CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA
Sendo $\Phi \subseteq Form$, a fórmula $\varphi \in Form$ diz-se consequência semântica de Φ, o que se denota

$$\Phi \models \varphi$$

se para cada estrutura de interpretação $\mathbb{M}$ sobre Alf e cada atribuição ρ de X em $\mathbb{M}$, se tem que

$$\text{se } \mathbb{M}, \rho \models \Phi \text{ então } \mathbb{M}, \rho \models \varphi.$$

Como se referiu, no caso do fragmento proposicional, para estabelecer $\Phi \models \varphi$ por via semântica, basta considerar apenas um número finito de estruturas de interpretação (valorações). Note-se que o caso geral, que tem vindo a ser apresentado nesta secção, é completamente diferente. Para estabelecer $\Phi \models \varphi$ é necessário considerar todas as estruturas de interpretação $\mathbb{M} = (U, I)$ e todas as atribuições ρ em $\mathbb{M}$. Embora a satisfação de uma fórmula por $\mathbb{M}$ com ρ só dependa, de facto, dos valores que ρ atribui a um número finito de variáveis, como U pode ser um qualquer conjunto não vazio, infinito em particular, pode existir um número infinito de atribuições relevantes a considerar. Assim, estabelecer por via semântica $\Phi \models \varphi$ no caso geral é uma tarefa com um carácter infinitário, por constraste com o carácter finitário de idêntica tarefa no caso do fragmento proposicional.

Exemplo 1.30 Considerando o alfabeto apresentada no exemplo 1.2 tem-se que

- $\models \forall x_1(Q(x_1) \vee (\neg Q(x_1)))$, ou seja, $\forall x_1(Q(x_1) \vee (\neg Q(x_1)))$ é uma fórmula válida
- $\not\models \forall x_1\, Q(x_1)$, ou seja, $\forall x_1\, Q(x_1)$ não é uma fórmula válida
- $\{\exists x_1(\forall x_2\, M(x_1, x_2))\} \models \forall x_1(\exists x_2\, , M(x_1, x_2))\}$, ou seja, $\forall x_1(\exists x_2\, , M(x_1, x_2))$ é consequência semântica de $\{\exists x_1(\forall x_2\, M(x_1, x_2))\}$
- $\{M(x_1, x_2))\} \not\models \forall x_1\, M(x_1, x_2)\}$, ou seja, $\forall x_1\, M(x_1, x_2)$ não é consequência semântica de $\{M(x_1, x_2)\}$. $\square$