Gramáticas

Definição: GRAMÁTICA
Um gramática é um quádruplo $G = (V, I, P, S)$ onde, sendo $\Sigma = V \cup I$,

- V é um conjunto não vazio e finito
  (conjunto dos símbolos não terminais ou auxiliares)
- I é um conjunto finito
  (conjunto dos símbolos terminais)
- $P \subseteq \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \Sigma^*$ e α tem pelo menos um elemento de $V\}$
  (conjunto das produções)
- $S \in V$ (símbolo inicial)

Se para cada $(\alpha, \beta) \in P$, α é um sequência com um único elemento[1], G diz-se uma gramática *independente do contexto*.

Se, para cada $(\alpha, \beta) \in P$, α é um sequência com um único elemento e $\beta \in I \cup \{\epsilon\}$ ou β é iY, com $i \in I$ e $Y \in V$, G diz-se uma gramática *regular*.

Notação: Sendo $G = (V, I, P, S)$ uma gramática, usa-se também a notação $\alpha \to \beta$ para representar a produção (α, β) em P. Usa-se também a notação $\alpha \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$ para representar em simultâneo as produções (α, β_1), (α, β_2), ..., (α, β_n).

Exemplo 1: $G = (V, I, P, S)$ onde

- $V = \{S, B, C, D\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $P = \{(S, 0B), (S, 1C), (S, 0C), (B, 0S), (B, 1D), (B, 1B), (C, 1S), (C, 0D), (B, \epsilon), (C, \epsilon), (D, 0C), (D, 1B)\}$

é um exemplo de gramática. É uma gramática regular.

Exemplo 2: $G = (V, I, P, S)$ onde

- $V = \{S, A, B\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $P ::$ $\begin{array}{l} S \to 0A \mid 1B \mid 1 \\ A \to 0A \mid 1A \mid \epsilon \\ B \to 0B \mid 1B \mid 1 \end{array}$

[1] que necessariamente tem de ser um símbolo não terminal

é um exemplo de gramática. É uma gramática regular. Note-se que se utilizaram aqui as notações acima referidas.

Exemplo 3: $G = (V, I, P, S)$ onde

- $V = \{S, A, B\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $P ::$ $\begin{array}{l} S \to A \mid B \\ A \to 0A1 \mid \epsilon \\ B \to 1B0 \mid \epsilon \end{array}$

é um exemplo de gramática. É uma gramática independente do contexto mas não é uma gramática regular.

Exemplo 4: $G = (V, I, P, E)$ onde

- $V = \{E\}$
- $I = \{x, y, z, +, *, (,)\}$
- $P ::$ $E \to x \mid y \mid z \mid E + E \mid E * E \mid (E)$

é um exemplo de gramática. É uma gramática independente do contexto mas não é uma gramática regular.

Na sequência sempre que se faça referência a uma gramática G assume-se que se trata de uma gramática regular ou de uma gramática independente do contexto.

Definição: Aplicação de produção a uma sequência
Seja $G = (V, I, P, S)$ uma gramática, $\Sigma = V \cup I$ e $X \to \beta$ uma produção em P:

- a produção $X \to \beta$ pode ser aplicada a uma sequência $w \in \Sigma^*$ sse $w = w_1 X w_2$ com $w_1, w_2 \in \Sigma^*$;
- se a produção $X \to \beta$ pode ser aplicada a $w \in \Sigma^*$ e $w' \in \Sigma^*$ é obtida a partir de w substituindo nesta sequência uma ocorrência de X por β, diz-se que w' resulta de w por aplicação da produção $X \to \beta$ (ou é resultado da aplicação da produção a w).

Exemplo 5: Considerando a gramática G apresentada no Exemplo 1, tem-se que a produção $(B, 1B)$ pode ser aplicada à sequência $w = 011B$ e a sequência $0111B$ é a sequência que resulta da aplicação da produção $(B, 1B)$ a w.

Definição: Demonstração e linguagem gerada por gramática
Seja $G = (V, I, P, S)$ uma gramática e $\Sigma = V \cup I$.

- Uma demonstração de $\sigma \in \Sigma^*$ em G é uma sequência $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ de elementos de Σ^* tal que (i) $\sigma_1 = S$, (ii) $\sigma_n = \sigma$ e (iii) para cada $1 \leq i < n$, σ_{i+1} resulta de σ_i por aplicação de uma produção.

  Usa-se a notação $\vdash_G \sigma$ para representar o facto de existir uma demonstração de σ em G.

- $\sigma \in \Sigma^*$ diz-se gerada por G sse existe uma demonstração de σ em G

- A linguagem gerada por G é

  $$L_G = \{\sigma \in I^* : \sigma \text{ é gerada por } G\}$$

  i.e., o conjunto das sequências de símbolos terminais geradas por G. Os elementos de L_G são também designados frases de G.

Ao representar uma demonstração numa gramática é usual numerar os elementos da sequência que constitui a demonstração e apresentar as produções que são utilizadas para obter obter cada um desses elementos a partir do elemento anterior.

Exemplo 6: Considerando a gramática G apresentada no Exemplo 1, tem-se que

1. S símbolo inicial
2. $0B$ $(S, 0B)$
3. $01B$ $(B, 1B)$
4. $011B$ $(B, 1B)$
5. $0111B$ $(B, 1B)$
6. 0111 (B, ϵ)

representa uma demonstração de 0111 em G (e portanto 0111 é gerada por G). A produção apresentada após cada sequência é a produção aplicada à sequência imediatadmente anterior para obter a sequência em causa.

Exemplo 7: Considerando a gramática G apresentada no Exemplo 4, tem-se que

1. E símbolo inicial
2. $E * E$ $E \to E * E$
3. $(E) * E$ $E \to (E)$
4. $(E + E) * E$ $E \to E + E$

5. $(x + E) * E \qquad E \rightarrow x$
6. $(x + y) * E \qquad E \rightarrow y$
7. $(x + y) * z \qquad E \rightarrow z$

representa uma demonstração de $(x+y)*z$ em G (e portanto $(x+y)*z$ é gerada por G). A produção apresentada após cada sequência é a produção aplicada à sequência imediatadmente anterior para obter a sequência em causa.

Exemplo 8: Considerando a gramática G apresentada no Exemplo 2, tem-se que L_G é o conjunto das sequências de 0's e 1's que comecem em 0 ou terminem em 1.

Exemplo 9: Considerando a gramática G apresentada no Exemplo 3, tem-se que L_G é o conjunto $\{0^n 1^n : n \in I\!N_0\} \cup \{1^n 0^n : n \in I\!N_0\}$.

Exemplo 10: Considerando a gramática G apresentada no Exemplo 4, tem-se que L_G é o conjunto das sequências sobre o alfabeto $\{x, y, z, +, \times, (,)\}$ que representam as expressões aritméticas que respeitam as convenções usuais (e.g. as operações de soma e multiplicação têm notação infixa e a multiplicação tem precedência sobre a soma).

Exemplo 11: Apresenta-se mais um exemplo de gramática independente do contexto, mas não regular: $G = (V, I, P, S)$ onde

- $V = \{S, A, B\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $P :: \begin{array}{l} S \rightarrow AB \mid BA \mid \epsilon \\ A \rightarrow AS \mid 0 \\ B \rightarrow BS \mid 1 \end{array}$

Esta gramática gera o conjunto de todas as sequências de 0's e 1's nas quais o número de 0's é igual ao número de 1's.