1 Enumerações, conjuntos numeráveis e efectivamente numeráveis[1]

Recorde que uma função se diz *bijectiva* se é simultaneamente injectiva e sobrejectiva. Uma função bijectiva é também designada por *bijecção*.

No texto seguinte consideram-se apenas funções *totais*, pelo que sempre que se faz referência a uma função se assume que é sempre uma função total.

Definição: Enumerações, enumerações sem repetição, conjuntos numeráveis e conjuntos efectivamente numeráveis
Sendo X um conjunto

- uma enumeração de X é uma função sobrejectiva em $[\mathbb{N}_0 \to X]$
- uma enumeração de X sem repetições é uma enumeração injectiva
- X diz-se numerável sse existe uma função bijectiva em $[X \to \mathbb{N}_0]$
- X diz-se efectivamente numerável sse existe uma função bijectiva f em $[X \to \mathbb{N}_0]$ tal que f e f^{-1} são efectivamente computáveis[2].

Proposição: São efectivamente numeráveis os conjuntos

- $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\bigcup_{k>0} \mathbb{N}_0^k \quad (= \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \cup \ldots)$

Prova (esboço):

- A função
$$\pi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$
tal que
$$\pi(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$$
é uma bijecção e é efectivamente computável. A função inversa de π,
$$\pi^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$$
é tal que

[1] Estas notas são baseadas em Sintaxe e Semântica de Linguagens I, J-F Costa, DMIST,2000; *Introdução à teoria da computação*, C. Sernadas, Editorial Presença, 1993; *Computability-an introduction to recursive function theory*, N. Cutland, Cambridge University Press, 1980

[2] A noção de função efectivamente computável deve ser aqui entendida no sentido em que pressupõe apenas a existência de um algoritmo que permite o cálculo efectivo dos valores da função (e não necessariamente um programa URM).

$$\pi^{-1}(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x))$$
com
$$\pi_1(x) = \text{expoente de 2 na factorização prima de } x+1$$
$$\pi_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2^{\pi_1(x)}} - 1\right)$$

e é efectivamente computável.

- A função
$$\xi : I\!N \times I\!N \times I\!N \to I\!N_0$$
tal que
$$\xi(m, n, q) = \pi(\pi(m-1, n-1), q-1)$$
é uma bijecção e é efectivamente computável. A função inversa de ξ,
$$\xi^{-1} : I\!N_0 \to I\!N \times I\!N \times I\!N$$
é tal que
$$\xi^{-1}(x) = (m, n, q)$$
onde
$$m = \pi_1(\pi_1(x)) + 1$$
$$n = \pi_2(\pi_1(x)) + 1$$
$$q = \pi_2(x) + 1$$
e é efectivamente computável.

- A função
$$\tau : \bigcup_{k>0} I\!N_0^k \to I\!N_0$$
tal que
$$\tau(a_1, \ldots, a_n) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + \ldots + 2^{a_1+a_2+\ldots+a_n+(n-1)} - 1$$
é uma bijecção e é efectivamente computável. A função inversa de τ,
$$\tau^{-1} : I\!N_0 \to \bigcup_{k>0} I\!N_0^k$$
é tal que
$$\tau^{-1}(x) = (a_1, \ldots, a_n)$$
onde, sendo
$$x + 1 = 2^{b_1} + \ldots + 2^{b_n}$$
com $0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, se tem que

$$a_1 = b_1$$
$$a_2 = b_2 - b_1 - 1$$
$$\dots$$
$$a_n = b_n - b_{n-1} - 1$$

e a função é efectivamente computável.

Observação:

- A definição da função π e o facto de ser injectiva e sobrejectiva tem por base o conhecido resultado que estabelece que cada natural $k \in I\!N$ tem uma factorização *única* em potências de números primos

$$k = 2^{n_1} \times 3^{n_2} \times 5^{n_3} \times \dots$$

  o que pode ser transformado em

$$k = 2^m(2n + 1)$$

  onde $m = n_1$ e $2n + 1$ é o número ímpar correspondente ao produto dos factores constituídos pelas potências dos primos distintos de 2 (como estes primos são ímpares, este produto é necessariamente um número ímpar). Daqui decorre que a cada $k \in I\!N$ corresponde um e um só par (m, n) tal que $k = 2^m(2n + 1)$.

  Como este resultado só se aplica valores $k \geq 1$ e se pretende que o codomínio de π seja $I\!N_0$, π não associa a cada par (m, n) o valor $2^m(2n+1)$, mas sim o valor $2^m(2n + 1) - 1$.

- O facto da função ξ ser injectiva e sobrejectiva é uma consequência da injectividade e sobrejectividade de π.

- A definição da função τ e o facto de ser injectiva e sobrejectiva tem por base o resultado que estabelece que cada natural $k \in I\!N$ pode ser escrito, *de forma única*, como uma soma de potências de 2

$$k = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_p}$$

  na qual os expoentes das várias potências são distintos entre si. Esta soma pode ser obtida a partir da conversão da representação de k em base 2 na representação de k em base 10 (eliminando as potências que têm coeficiente 0).

  Uma outra forma compreender o que motiva a construção da bijecção τ é a que se descreve de seguida. A ideia é fazer corresponder a cada tuplo de naturais $< a_1, a_2, \dots, a_k >$ o natural que em notação binária tem a seguinte representação: (i) tem k 1's, (ii) tem a_1 0's antes do primeiro 1, (iii) tem a_2 0's entre o primeiro 1 e o segundo 1, (iv) tem a_3 0's entre o segundo 1 e o terceiro 1, etc. Por exemplo, a ideia é fazer corresponder a $< 3, 1, 2 >$ o natural que em binário é 100101000. No entanto, esta correspondência não permitiria que 0 pertencesse ao contradomínio de τ. Dado que cada elemento em $\bigcup_{k>0} \mathbb{N}_0^k$ tem no mínimo um elemento, o natural construído da forma indicada tem sempre um 1 e portanto o codomínio de τ seria $\mathbb{N}$. Assim, e tal como acontecia com a bijecção π, subtrai-se 1 unidade ao valor indicado, isto é, em vez de se fazer corresponder a $< a_1, a_2, \ldots, a_k >$ o natural com as características referidas, faz-se corresponder esse natural subtraído de 1. Por exemplo, a $< 3, 1, 2 >$ faz-se corresponder $100101000 - 1$. Finalmente, deixa-se como exercício verificar que a representação em base 10 do natural que em binário tem as caracteríticas indicadas pode ser obtida directamente dos valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ como indicado na definição da função τ.

2 Número de Gödel de um comando e número de Gödel de um programa

Notação:

- $\mathbb{I}$ é o conjunto dos comandos URM.
- $\mathbb{P}$ é o conjunto dos programa URM.

Proposição: O conjunto $\mathbb{I}$ é efectivamente numerável.

Prova: A função

$$\beta : \mathbb{I} \to \mathbb{N}_0$$

tal que para cada $n, m, q \in \mathbb{N}$,

- $\beta(Z(n)) = 4(n-1)$
- $\beta(S(n)) = 4(n-1) + 1$
- $\beta(T(m,n)) = 4\pi(m-1, n-1) + 2$
- $\beta(J(m,n,q)) = 4\xi(m,n,q) + 3$

é uma bijecção e é efectivamente computável. A função inversa de β é

$$\beta^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{I}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}_0$

$$\beta^{-1}(n) = \begin{cases} Z(u+1) & \text{se } n = 4u + 0 \\ S(u+1) & \text{se } n = 4u + 1 \\ T(\pi_1(u)+1, \pi_2(u)+1) & \text{se } n = 4u + 2 \\ J(m,n,q) & \text{se } n = 4u + 3 \text{ e } (m,n,q) = \xi^{-1}(u) \end{cases}$$

e é efectivamente computável. O facto de β ser injectiva e sobrejectiva é consequência da sobrejectividade e injectividade de π e ξ. O mesmo se pode dizer relativamente ao facto de β e β^{-1} serem efectivamente computáveis.

Proposição: O conjunto $I\!\!P$ é efectivamente numerável .

Prova: A função

$$\gamma : I\!\!P \to I\!\!N_0$$

tal que para cada $P =< p_1, \ldots, p_n >\in I\!\!P$,

$$\gamma(P) = \tau(\beta(p_1), \ldots, \beta(p_n))$$

é uma bijecção pois τ e β são bijecções. Por outro lado, τ e β, são efectivamente computáveis logo γ é efectivamente computável. A função inversa de γ,

$$\gamma^{-1} : I\!\!N_0 \to I\!\!P$$

é tal que

$$\gamma^{-1}(x) =< p_1, \ldots, p_n >$$

onde

$$p_1 = \beta^{-1}(a_1)$$

$$\ldots$$

$$p_n = \beta^{-1}(a_n)$$

e

$$\tau^{-1}(x) =< a_1, \ldots, a_n >$$

As funções τ^{-1} e β^{-1} são efectivamente computáveis logo γ^{-1} é efectivamente computável.

Definição: Número de Gödel de um comando e número de Gödel de um programa
Para cada comando $p \in I\!\!I$, o valor $\beta(p)$ é o número de Gödel de p. Para cada programa $P \in I\!\!P$ o valor $\gamma(P)$ é o número de Gödel de P.