1 Autómatos finitos não deterministas

Nesta secção estuda-se um outro tipo de autómatos finitos: os autómatos finitos não deterministas. Existem duas diferenças fundamentais entre autómatos finitos deterministas e não deterministas. A primeira reside no facto de nos autómatos finitos não deterministas poderem existir duas ou mais transições associadas a um mesmo símbolo a partir de um único estado. A designação *não determinista* advém precisamente desta característica. A segunda diferença reside no facto de nos autómatos finitos não deterministas ser permitido efectuar transições entre estados sem que nenhum símbolo do alfabeto a elas esteja associado, as chamadas transições-ϵ, ou movimentos-ϵ. No entanto, como se estudará adiante na secção 1.2, estes dois tipos de autómatos são equivalentes do ponto de vista das linguagens por eles reconhecidas. Se uma linguagem é reconhecida por um autómato finito não determinista então existe também um autómato finito determinista que a reconhece e vice-versa. A vantagem dos autómatos não deterministas sobre os deterministas é que, em geral, os autómatos não deterministas são mais fáceis de conceber e têm menos estados. Em contrapartida, a verificação de que uma palavra é aceite por um autómato não determista é mais elaborada do que no caso dos autómatos deterministas.

1.1 Autómatos finitos não deterministas

Definição 1.1 AUTÓMATO FINITO NÃO DETERMINISTA
Um *autómato finito não determinista*, ou apenas AFND$^\epsilon$, é um quíntuplo

$$A^\epsilon = (Q, I, \delta, q_0, F)$$

onde

- Q é um conjunto finito (*conjunto dos estados*);
- I é um conjunto finito (*conjunto dos símbolos de entrada*);
- $\delta : Q \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$ é uma função total (*função de transição*);
- $q_0 \in Q$ (*estado inicial*);
- $F \subseteq Q$ (*conjunto dos estados finais*).

Designa-se por *autómato finito não determinista sem movimentos-ϵ*, ou apenas AFND, qualquer autómato finito não determinista tal que $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$ para cada $q \in Q$. Sempre que se considerem de AFNDS, podem omitir-se todas as referência a ϵ pelo que se pode escrever simplesmente $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ em que o domínio da função de transição δ é apenas $Q \times I$. ◀

Recorde-se que 2^Q denota o conjunto constituído por todos os subconjuntos de Q.

Exemplo 1.2 $A^\epsilon = (Q, I, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$;

- $I = \{a, b\}$;
- $\delta : Q \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$ é tal que

δ	a	b	ϵ
q_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1, q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

- $F = \{q_1, q_4\}$. ▲

Exemplo 1.3 $A^\epsilon = (Q, I, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$;
- $I = \{a, b, c\}$;
- $\delta : Q \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$ é tal que

δ	a	b	c	ϵ
p_0	$\{p_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{p_1\}$
p_1	$\{p_2, p_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{p_5\}$
p_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{p_4\}$	$\emptyset$
p_3	$\emptyset$	$\{p_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
p_4	$\{p_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{p_1\}$
p_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $q_0 = p$;
- $F = \{p_5\}$. ▲

Exemplo 1.4 $A^\epsilon = (Q, I, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{p, q, r, s\}$;
- $I = \{0, 1\}$;
- $\delta : Q \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$ é tal que

δ	0	1	ϵ
p	$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\emptyset$
q	$\emptyset$	$\{s\}$	$\emptyset$
r	$\{s\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
s	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $q_0 = p$;
- $F = \{s\}$.

Observe-se que este é um autómato finito não determinista sem movimentos-ϵ, pelo que também se poderia ter simplesmente escrito $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ em que

- $\delta : Q \times I \to 2^Q$ tal que

δ	0	1
p	$\{p, r\}$	$\{p, q\}$
q	$\emptyset$	$\{s\}$
r	$\{s\}$	$\emptyset$
s	$\emptyset$	$\emptyset$

▲

Tal como um AFD, um AFND$^\epsilon$ é constituído por um conjunto finito de estados, de entre os quais se distinguem o estado inicial e os estados finais, por um conjunto finito de símbolos de entrada, o alfabeto do AFND$^\epsilon$, e por uma função de transição. Um AFND$^\epsilon$ define também uma linguagem sobre o seu alfabeto.

Como referido, a diferença entre um AFD e um AFND$^\epsilon$ reside na função de transição. Para cada símbolo a do alfabeto, $\delta(q, a)$, o mesmo acontecendo no caso de $\delta(q, \epsilon)$. Se $p \in \delta(q, a)$ diz-se que existe uma transição de q para p associada ao símbolo a. Se $p \in \delta(q, \epsilon)$, diz-se que existe uma transição-ϵ, ou movimento-ϵ, de q para p. Isto corresponde à possibilidade de transitar de um estado para outro sem que nenhum símbolo do alfabeto esteja associado a esta transição. Note-se ainda que num AFND$^\epsilon$ a função de transição é sempre total. Quando $\delta(q, a) = \emptyset$ não existem transições associadas ao símbolo a a partir de q e quando $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$ não existem movimentos-ϵ a partir de q.

Tal como no caso de um AFD, um caminho num AFND é uma sequência de estados $q_1 q_2 \dots q_n$, $n \geq 1$, mas agora, para cada $1 \leq k < n$, $q_{k+1} \in \delta(q_k, a_k)$ para algum símbolo a_k do alfabeto. As palavras $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ assim obtidas são as palavras associadas ao caminho $q_1 q_2 \dots q_n$. Por exemplo, $ppqs$ é um caminho do AFND apresentado no Exemplo 1.4. As palvras 011 e 111 são as palavras associadas a este caminho.

Por outro lado, dado um estado q e uma palavra $a_1 a_2 \dots a_n$, $n \geq 0$, num AFD existe no máximo um caminho com início em q associado a esta palavra mas, no caso de um AFND, podem existir vários caminhos: são caminhos $q_1 q_2 \dots q_{n+1}$ em que q_1 é q e $q_{k+1} \in \delta(q_k, a_k)$ para cada $1 \leq k \leq n$. Pode também não haver qualquer caminho a partir de q associado à palavra. Por exemplo, voltando de novo ao AFND apresentado no Exemplo 1.4, à palavra 0111 estão associados três caminhos com início em p. São os caminhos $ppppp$, $pppqs$ e $ppppq$. Por sua vez, à palavra 11 não está associado nenhum caminho que comece em r.

Faz-se agora referência ao caso mais geral de um AFND$^\epsilon$. A noção de caminho num AFND$^\epsilon$ é semelhante à anterior mas têm de se considerar também movimentos ϵ: um caminho é uma sequência de estados $q_1 q_2 \dots q_n$, $n \geq 1$, em que, para cada $1 \leq k < n$, $q_{k+1} \in \delta(q_k, \nu_k)$ e ν_k é ϵ ou é um símbolo do alfabeto. As palavras associadas ao caminho são palavras obtidas como no caso dos AFNDS, mas considerando aqui apenas os símbolos ν_k distintos de ϵ, e ainda a palavra ϵ se $q_{k+1} \in \delta(q_k, \epsilon)$ para cada $1 \leq k < n$. Por exemplo, $p_0 p_1 p_2 p_4 p_1 p_3 p_4$

é um caminho do AFND^ϵ apresentado no Exemplo 1.3. As palavras associadas a este caminho são *aacab* e *acab*. Ao caminho $p_0p_1p_5$ estão associadas as palavras a e ϵ

Naturalmente, dado um estado q e uma palavra $a_1a_2\ldots a_n$, $n \geq 0$, também no caso de um AFND^ϵ podem existir vários caminhos a partir de q associados a esta palavra. Estes caminhos podem ter mais de $n+1$ estados pois poderão estar envolvidos movimentos-ϵ. São assim caminhos $q_1q_2\ldots q_m$, $m > n$, em que, tal como anteriormente, q_1 é q e existem as transições associadas aos símbolos a_1, a_2,..., a_n entre estados adjacentes do caminho, mas poderão também existir movimentos-ϵ entre outros estados adjacentes. De um modo mais rigoroso, $q_1q_2\ldots q_m$ é um caminho a partir de q associado à palavra $a_1a_2\ldots a_n$ se $m > n$, q_1 é q e existe uma função injectiva e estritamente crescente $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que, para cada $1 \leq j < m$, $q_{j+1} \in \delta(q_j, a_k)$ se $j = f(k)$ para algum $1 \leq k \leq n$ e $q_{j+1} \in \delta(q_j, \epsilon)$ caso contrário. A função f indica, para cada símbolo a_k, qual é o estado q_j do caminho a partir do qual existe a transição associada a a_k para o estado seguinte q_{j+1}. Claro que pode também não existir qualquer caminho a partir de q associado à palavra $a_1a_2\ldots a_n$. Por exemplo, considerando de novo o AFND^ϵ do Exemplo 1.3, à palavra *aca* estão associados três caminhos que começam em p_0: são os caminhos $p_0p_1p_2p_4p_5$, $p_0p_1p_2p_4p_1p_2$ e $p_0p_1p_2p_4p_1p_3$. À palavra *ba* não está associado nenhum caminho que comece em p_0.

Para definir a linguagem reconhecida por um AFND^ϵ, e tal como nos casos anteriores, é útil a função de transição estendida. Para definir a função de transição estendida neste caso é conveniente considerar primeiro a noção de fecho-ϵ de um estado.

Considera-se fixado um AFND^ϵ $A^\epsilon = (Q, I, \delta, q_0, F)$.

Definição 1.5 FECHO-ϵ DE UM ESTADO DE AFND^ϵ
O *fecho-*ϵ de um estado q de A^ϵ é o conjunto q^ϵ definido como se segue:

- $q \in q^\epsilon$;
- se $q' \in q^\epsilon$ então $\delta(q', \epsilon) \subseteq q^\epsilon$.

Dado um subconjunto C de Q, C^ϵ é o conjunto $\bigcup_{q \in C} q^\epsilon$. ◀

O fecho-ϵ do estado q é o conjunto de estados constituído pelo próprio estado q e por todos os estados de cada caminho do AFND^ϵ que comece por q e a que esteja associada a palavra ϵ. Por outras palavras, o fecho-ϵ do estado q é constituído por q e por todos os estados para os quais se possa efectuar um movimento-ϵ a partir de q ou vários movimento-ϵ consecutivos a partir de q.

Observe-se que se num autómato finito não deterministas não existirem movimentos-ϵ então $q^\epsilon = \{q\}$ para cada estado q.

Exemplo 1.6 Considerando o AFND^ϵ A^ϵ apresentado no Exemplo 1.2 tem-se que:

- $q_0^\epsilon = \{q_0, q_1, q_3\}$;

- $q_1^\epsilon = \{q_1\}$;
- $q_2^\epsilon = \{q_2\}$;
- $q_3^\epsilon = \{q_3\}$;
- $q_4^\epsilon = \{q_4\}$.

e, como exemplo de fecho-ϵ de um conjunto de estados,

- $\{q_0, q_2\}^\epsilon = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$;
- $\{q_1, q_2\}^\epsilon = \{q_1, q_2\}$.

No caso do AFND$^\epsilon$ A^ϵ apresentado no Exemplo 1.3:

- $p_0^\epsilon = \{p_0, p_1, p_5\}$;
- $p_1^\epsilon = \{p_1, p_5\}$;
- $p_2^\epsilon = \{p_2\}$;
- $p_3^\epsilon = \{p_3\}$;
- $p_4^\epsilon = \{p_1, p_4, p_5\}$;
- $p_5^\epsilon = \{p_5\}$.

No caso do AFND$^\epsilon$ apresentado no Exemplo 1.4, tem-se que $q'^\epsilon = \{q'\}$ para cada estado q' do autómato. ▲

Define-se agora a função de transição estendida de um AFND$^\epsilon$.

Definição 1.7 FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO ESTENDIDA DE AFND$^\epsilon$
A *função de transição estendida* de A^ϵ é a função $\delta^* : Q \times I^* \to 2^Q$ tal que

$$\delta^*(q, w) = \begin{cases} q^\epsilon & \text{se } w = \epsilon \\ \bigcup_{q' \in q^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \delta^*(q'', w')) & \text{se } w = a.w' \end{cases}$$

para cada $q \in Q$ e $w \in I^*$. Naturalmente, no caso particular de um AFND, a função de transição estendida $\delta^* : Q \times I^* \to 2^Q$ é

$$\delta^*(q, w) = \begin{cases} q & \text{se } w = \epsilon \\ \bigcup_{q' \in \delta(q, a)} \delta^*(q', w') & \text{se } w = a.w' \end{cases}$$

para cada $q \in Q$ e $w \in I^*$. ◀

O facto de $p \in \delta^*(q, w)$ significa que em A^ϵ existe pelo menos um caminho que começa em q e termina em p e está associado à palavra w.

Definição 1.8 PALAVRA ACEITE E LINGUAGEM RECONHECIDA POR AFND$^\epsilon$
A palavra $w \in I^*$ diz-se *aceite* por A^ϵ se $\delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$. A *linguagem reconhecida por* A^ϵ, ou *linguagem de* A^ϵ, é o conjunto

$$L_{A^\epsilon} = \{w \in I^* : \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Uma palavra w é aceite por A^ϵ se existe um caminho de A^ϵ associado a w que começa no estado inicial e termina no estado final. A linguagem reconhecida por A^ϵ é o conjunto de todas as palavras aceites por A^ϵ.

Exemplo 1.9 Considere-se o AFND$^\epsilon$ apresentado no Exemplo 1.4. Calcule-se o valor que a função δ^* atribui ao par $(p, 010)$. Como este autómato é um AFND, usa-se a definição de δ^* correspondente:

$$
\begin{aligned}
\delta^*(p, 010) &= \bigcup_{q' \in \delta(p,0)} \delta^*(q', 10) \\
&= \bigcup_{q' \in \{p,r\}} \delta^*(q', 10) \\
&= \delta^*(p, 10) \cup \delta^*(r, 10) \\
&= (\bigcup_{q' \in \delta(p,1)} \delta^*(q', 0)) \cup (\bigcup_{q' \in \delta(r,1)} \delta^*(q', 0)) \\
&= (\bigcup_{q' \in \{p,q\}} \delta^*(q', 0)) \cup (\bigcup_{q' \in \emptyset} \delta^*(q', 0)) \\
&= \delta^*(p, 0) \cup \delta^*(q, 0) \\
&= (\bigcup_{q' \in \delta(p,0)} \delta^*(q', \epsilon)) \cup (\bigcup_{q' \in \delta(q,0)} \delta^*(q', \epsilon)) \\
&= (\bigcup_{q' \in \{p,r\}} \delta^*(q', \epsilon)) \cup (\bigcup_{q' \in \emptyset} \delta^*(q', \epsilon)) \\
&= \delta^*(p, \epsilon) \cup \delta^*(r, \epsilon) \\
&= \{p\} \cup \{r\} \\
&= \{p, r\}
\end{aligned}
$$

O facto de $\delta^*(p, 010) = \{p, r\}$ significa que os caminhos de A associados à palavra 010 que começam em p, são caminhos que ou terminam também em p ou terminam em r. Como não existe nenhum caminho que comece no esatdo inicial, p, e termine no estado final, isto é, $s \notin \delta^*(p, 010)$, a palavra 010 não é aceite por A.

Calcule-se agora o valor que a função δ^* atribui ao par $(p, 1011)$:

$$
\begin{aligned}
\delta^*(p, 1011) &= \bigcup_{q' \in \delta(p,1)} \delta^*(q', 011) \\
&= \bigcup_{q' \in \{p,q\}} \delta^*(q', 011) \\
&= \delta^*(p, 011) \cup \delta^*(q, 011) \\
&= (\bigcup_{q' \in \delta(p,0)} \delta^*(q', 11)) \cup (\bigcup_{q' \in \delta(q,0)} \delta^*(q', 11)) \\
&= (\bigcup_{q' \in \{p,r\}} \delta^*(q', 11)) \cup (\bigcup_{q' \in \emptyset} \delta^*(q', 11)) \\
&= \delta^*(p, 11) \cup \delta^*(r, 11) \\
&= (\bigcup_{q' \in \delta(p,1)} \delta^*(q', 1)) \cup (\bigcup_{q' \in \delta(r,1)} \delta^*(q', 1)) \\
&= (\bigcup_{q' \in \{p,q\}} \delta^*(q', 1)) \cup (\bigcup_{q' \in \emptyset} \delta^*(q', 1)) \\
&= \delta^*(p, 1) \cup \delta^*(q, 1) \\
&= (\bigcup_{q' \in \delta(p,1)} \delta^*(q', \epsilon)) \cup (\bigcup_{q' \in \delta(q,1)} \delta^*(q', \epsilon)) \\
&= (\bigcup_{q' \in \{p,q\}} \delta^*(q', \epsilon)) \cup (\bigcup_{q' \in \{s\}} \delta^*(q', \epsilon)) \\
&= \delta^*(p, \epsilon) \cup \delta^*(q, \epsilon) \cup \delta^*(s, \epsilon) \\
&= \{p\} \cup \{q\} \cup \{s\} \\
&= \{p, q, s\}
\end{aligned}
$$

O facto de $\delta^*(p, 1011) = \{p, q, s\}$ significa que os caminhos em A associados à palavra 1011 que começam em p ou terminam em p, ou terminam em q ou terminam em s. Como p é o estado inicial e existe um caminho que termina no estado final, isto é $s \in \delta^*(p, 1011)$, a palavra 1011 é aceite por A.

A linguagem reconhecida por A é o conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto $\{0,1\}$ que terminam com dois símbolos iguais. ▲

Exemplo 1.10 Considere-se o AFND$^\epsilon$ apresentado no Exemplo 1.4. Calcule-se o valor que a função δ^* atribui ao par (q_0, b):

$$
\begin{array}{ll}
\delta^*(q_0, b) & = \bigcup_{q' \in q_0^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& = \bigcup_{q' \in \{q_0,q_1,q_3\}} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& = (\bigcup_{q'' \in \delta(q_0,b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \delta(q_1,b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \delta(q_3,b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& = (\bigcup_{q'' \in \emptyset} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \{q_1\}} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \{q_4\}} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& = \delta^*(q_1, \epsilon) \cup \delta^*(q_4, \epsilon) \\
& = q_1^\epsilon \cup q_4^\epsilon \\
& = \{q_1\} \cup \{q_4\} \\
& = \{q_1, q_4\}
\end{array}
$$

O facto de $\delta^*(q_0, a) = \{q_1, q_4\}$ significa que os caminhos de A^ϵ associados à palavra a que começam em p_0 são caminhos que terminam em algum dos estados em $\{q_1, q_4\}$. Como p_0 é o estado inicial e existe um caminho que termina num estado final, que neste caso pode ser q_1 ou q_4, a palavra b é aceite por A^ϵ.

A linguagem reconhecida por A^ϵ é o conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$ que têm um número par de a's ou um número ímpar de b's. ▲

Exemplo 1.11 Considere-se o AFND$^\epsilon$ apresentado no Exemplo 1.3. Calcule-se o valor que a função δ^* atribui ao par (p_0, ab):

$$
\begin{aligned}
\delta^*(p_0, ab) \quad & = \bigcup_{q' \in p_0^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',a)} \delta^*(q'', b)) \\
& = \bigcup_{q' \in \{p_0,p_1,p_5\}} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',a)} \delta^*(q'', b)) \\
& = (\bigcup_{q'' \in \delta(p_0,a)} \delta^*(q'', b)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \delta(p_1,a)} \delta^*(q'', b)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \delta(p_5,a)} \delta^*(q'', b)) \\
& = (\bigcup_{q'' \in \{p_1\}} \delta^*(q'', b)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \{p_2,p_3\}} \delta^*(q'', b)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \emptyset} \delta^*(q'', b)) \\
& = \delta^*(p_1, b) \cup \delta^*(p_2, b) \cup \delta^*(p_3, b) \\
& = \bigcup_{q' \in p_1^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad \bigcup_{q' \in p_2^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad \bigcup_{q' \in p_3^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& = \bigcup_{q' \in \{p_1,p_5\}} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad \bigcup_{q' \in \{p_2\}} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad \bigcup_{q' \in \{p_3\}} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& = (\bigcup_{q'' \in \delta(p_1,b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \ \cup \ (\bigcup_{q'' \in \delta(p_5,b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \delta(p_2,b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \delta(p_3,b)} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& = (\bigcup_{q'' \in \emptyset} \delta^*(q'', \epsilon)) \ \cup \ (\bigcup_{q'' \in \emptyset} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \emptyset} \delta^*(q'', \epsilon)) \cup \\
& \quad (\bigcup_{q'' \in \{p_4\}} \delta^*(q'', \epsilon)) \\
& = \delta^*(p_4, \epsilon) \\
& = p_4^\epsilon \\
& = \{p_1, p_4, p_5\}
\end{aligned}
$$

O facto de $\delta^*(p_0, ab) = \{p_1, p_4, p_5\}$ significa que os caminhos de A^ϵ associados à palavra ab que começam em p_0 são caminhos que terminam em algum dos estados em $\{p_1, p_4, p_5\}$. Como p_0 é o estado inicial e existe um caminho que termina num estado final, neste caso p_5, a palavra ab é aceite por A^ϵ.

A linguagem reconhecida por A^ϵ é o conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$ do tipo w, aw, wa ou awa em que $w \in \{ab, ac\}^*$. ▲

1.2 Autómatos deterministas vs autómatos não deterministas

Nesta secção relacionam-se sob alguns aspectos os vários tipos de autómatos apresentados até agora: AFDS, AFNDS e AFND$^\epsilon$S.

Uma questão que se pode colocar é a de saber quais as vantagens e desvantagens da utilização de um tipo de autómatos face aos outros. Quanto às vantagens da utilização de AFND$^\epsilon$s face à utilização de AFNDS, acontece que, em geral, os AFND$^\epsilon$s têm menos transições que os AFNDS que reconhecem a mesma linguagem. Em contrapartida, o cálculo da função de transição estendida é mais elaborado no caso dos AFND$^\epsilon$s, como se viu anteriormente.

Os AFND$^\epsilon$s são particularmente úteis quando se trata de construir autómatos para novas linguagens partindo de autómatos já construídos para outras linguagenss. Por exemplo, dispondo de dois AFNDS (ou AFDS), A_1 e A_2 para as linguagens L_1 e L_2, respectivamente, é fácil construir um AFND$^\epsilon$ A^ϵ para a lingugem $L_1 \cup Ł_2$. Basta considerar todos os estados e transições de A_1 e A_2, introduzir um novo estado, que será o estado inicial de A^ϵ, e introduzir movimentos-ϵ deste novo estado para os estados iniciais de A_1 e A_2. Os estados finais de A^ϵ obtêm-se reunindo os estados finais de A_1 com os de A_2. É o caso do autómato A^ϵ considerado no Exemplo 1.3, que pode ser visto como tendo sido obtido da forma indicada a partir do AFD A_1 que envolve apenas os estados q_1 e q_2 e correspondentes transições, e do AFD A_2 que envolve apenas os estados q_3 e q_4 e correspondentes transições. A linguagem L_{A_1} é o conjunto das palavras sobre $\{a, b\}$ que têm um número par de a's e a A linguagem L_{A_2} é o conjunto das palavras sobre $\{a, b\}$ que têm um número ímpar de b's. A linguagem de A^ϵ é $L_{A_1} \cup L_{A_2}$. Mais situações de utilização de AFND$^\epsilon$s semelhantes a esta são descritas adiante na secção **??**.

Referem-se agora algumas questões relativas às vantagens e desvantagens da utilização dos AFNDS face à utilização dos AFDS. Os AFNDS são em geral mais fáceis de construir que os AFDS. Têm também, em geral, menos estados e menos transições que os AFDS para a mesma linguagem. Apresentam-se de seguida dois exemplos ilustrativos.

Exemplo 1.12 Considere-se o AFND A apresentado no Exemplo 1.4. A linguagem reconhecida por A é o conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ que terminam com dois símbolos iguais. O AFD $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$;
- $I = \{0, 1\}$;
- $\delta : Q \times I \to Q$ é tal que

δ	0	1
q_0	q_3	q_1
q_1	q_3	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_4	q_1
q_4	q_1	q_4

- $F = \{q_2, q_4\}$;

reconhece exactamente a linguagem L_A. Além disso, D é um AFD mínimo (verifique usando as técnicas apresentadas na Secção **??**). Comparando os dois autómatos verifica-se que, de facto, D tem mais um estado que A e também mais transições. ▲

Exemplo 1.13 Suponha-se que se pretende agora construir um AFND para a linguagem L constituída pelas palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ nas quais o antepenúltimo e penúltimo símbolos são iguais. Por exemplo, 001, 1000 e 10110 são palavras desta linguagem. A partir do AFND apresentado no Exemplo 1.9 facilmente se obtém o AFND pretendido. Basta introduzir mais um estado, que passa a ser o estado final, e considerar transições associadas a 0 e a 1 do estado final do AFND anterior para este novo estado. Obtém-se assim $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{p, q, r, s, t\}$;
- $I = \{0, 1\}$;
- $q_0 = p$;
- $\delta : Q \times I \to 2^Q$ é tal que

δ	0	1
p	$\{p, r\}$	$\{p, q\}$
q	$\emptyset$	$\{s\}$
r	$\{s\}$	$\emptyset$
s	$\{t\}$	$\{t\}$
t	$\emptyset$	$\emptyset$

- $F = \{t\}$.

Construa-se agora um AFD para esta linguagem. Neste caso o AFD tem de ter, no mínimo, 9 estados. A linguagem reconhecida pelo AFD $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$;
- $I = \{0, 1\}$;
- $\delta : Q \times I \to Q$ é tal que

δ	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_1
q_3	q_7	q_5
q_4	q_6	q_8
q_5	q_7	q_5
q_6	q_6	q_8
q_7	q_4	q_1
q_8	q_2	q_3

- $F = \{q_5, q_6, q_7, q_8\}$;

é precisamente a linguagem L e este autómato é mínimo (verifique). ▲

Uma outra questão relevante sobre a relação entre AFDS, AFNDS e AFND$^\epsilon$S é a de saber se existirão linguagens que sejam reconhecidas por um autómato de um destes três tipos mas não o sejam por autómatos de algum dos outros dois tipos. Como se explicará de seguida, tais linguagens não existem. Do ponto de vista das linguagens reconhecidas, os AFDS, os AFNDS e os AFND$^\epsilon$S são equivalentes, isto é, se uma linguagem é reconhecida por um AFND$^\epsilon$, por exemplo, então também é reconhecida por um AFND e por um AFD, o mesmo acontecendo nos outros casos possíveis.

Comece-se por observar que os AFDS podem ser visto como casos particulares de AFNDS, e estes são casos particulares de AFND$^\epsilon$s. Pode então concluir-se que qualquer linguagem que seja reconhecida por um AFD também o é por um AFND e qualquer linguagem que seja reconhecida por um AFND também o é por um AFND$^\epsilon$.

Um AFND é um caso particular de AFND$^\epsilon$ no qual não existem movimentos-ϵ. É assim trivial obter um AFND$^\epsilon$ que reconheça a linguagem de um AFND dado: basta estender a função de transição atribuindo aos pares (q, ϵ) o conjunto vazio.

Dado um AFD, facilmente se compreende que existe um AFND que reconhece exactamente a mesma linguagem, uma vez que um AFD pode ser visto como o caso particular de um AFND em que, para cada estado, existe no máximo uma transição associada a cada símbolo do alfabeto. Para construir o AFND basta uma pequena modificação na função de transição por forma a que o resultado da sua aplicação a cada par seja agora visto como um conjunto. Define-se seguidamente o AFND resultante de um AFD.

Definição 1.14 AFND RESULTANTE DE AFD
Dado um AFD $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$, o AFND *resultante de* D é o AFND $\mathit{afnd}(D) = (Q, I, \delta', q_0, F)$ em que

- $\delta_A : Q \times I \to 2^Q$ é tal que

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \{p\} & \text{se } \delta(q,a) = p \\ \emptyset & \text{se } \delta(q,a)\uparrow \end{cases}$$

  para cada $q \in Q$ e $a \in I$. ◀

Todas as componentes de $\mathit{afnd}(D)$ são idênticas às de D excepto a função de transição. A função de transição de $\mathit{afnd}(D)$ define-se atribuindo o conjunto singular $\{p\}$ ao par (q, a) se em D existe uma transição de q para p associada a a e atribuindo o conjunto vazio ao par (q, a) quando não existe transição associada a a a partir de q. A linguagem de $\mathit{afnd}(D)$ é precisamente L_D. Esta propriedade de $\mathit{afnd}(D)$ é enunciada na Proposição 1.21. Apresenta-se seguidamente um exemplo de construção do AFND resultante de um AFD.

Exemplo 1.15 Considere-se o AFD D apresentado no Exemplo **??**. O AFND resultante de D é $\mathit{afnd}(D) = (Q, I, \delta', q_0, F)$ em que

- $\delta' : Q \times I \to 2^Q$ é tal que

δ_A	a	b
p	$\{q\}$	$\emptyset$
q	$\{q\}$	$\{r\}$
r	$\{q\}$	$\{r\}$

A linguagem reconhecida por $\mathit{afnd}(D)$ é L_D. ▲

Estuda-se agora o problema de saber se dado um AFND$^\epsilon$ é possível construir também um AFND cuja linguagem é precisamente a linguagem do AFND$^\epsilon$. Como se verá de seguida, é sempre possível construir um tal AFND.

Num AFND$^\epsilon$ que tenha movimentos-ϵ é possível a partir de um estado q efectuar uma transição ou várias transições consecutivas até a um certo estado p, sem que nenhum símbolo do alfabeto esteja associado a estas transições, isto é, podem existir caminhos que começam em q, terminam em p e a eles está associada a palavra ϵ. Como se sabe, os estados p nestas condições constituem, juntamente com q, o fecho-ϵ de q. Se a partir de um destes estados no fecho-ϵ de q se pode efectuar uma transição associada a um símbolo i para um outro estado p', é possível a partir de q efectuar transições consecutivas até p', nas quais um único símbolo do alfabeto está envolvido, isto é, de entre essas transições existe *uma* única associada a um símbolo do alfabeto, neste caso i. Isto significa que existe um caminho que começa em q e termina em p' ao qual está associada a palavra i. Esta informação de que no AFND$^\epsilon$ é possível a partir de q chegar a estados p' deste modo tem de estar presente no AFND que se pretende construir: vão ter de existir transições associadas a i de q para estes estados p'. Como exemplo, considere-se o AFND$^\epsilon$ apresentado no Exemplo 1.3. Os estados p_0 e p_1 pertencem a p_0^ϵ e existem transições associadas a a de p_0 para p_1, de p_1 para p_2 e de p_1 para p_2. A palavra a está asim associada a cada um dos caminhos p_0p_1, $p_0p_1p_2$ e $p_0p_1p_3$. Daqui resulta que no AFND vão ter de existir transições associadas a a de p_0 para p_1, de p_0 para p_2 e de p_0 para p_3.

Voltando ao caso geral, se se considerar agora os outros estados no fecho-ϵ de p', existem também caminhos que começam em q, terminam num desses estados e a eles está associada a palavra i. A informação de que no AFND$^\epsilon$ é possível a partir de q chegar a estados no fecho-ϵ de p' efectuando apenas *uma* transição associada a um símbolo do alfabeto, neste caso o símbolo i, tem de estar presente no AFND que se pretende construir: vão ter de existir transições associadas a i de q para os estados no fecho-ϵ de p'. No caso do AFND$^\epsilon$ do Exemplo 1.3, tem-se que p_5 pertence a p_1^ϵ, pelo que a palavra a está ainda associada ao caminho $p_0p_1p_5$. Daqui resulta que vai existir ainda uma transição associada a a de p_0 para p_5.

Assim, no AFND que se pretende construir, os estados são os estados do AFND$^\epsilon$ e o estado inicial é também o mesmo, mas as transições são obtidas como explicado. No AFND há uma transição associada a i de q para p' sempre que no AFND$^\epsilon$ existe a partir de $q' \in q^\epsilon$ uma transição associada a i para um estado p e $p' \in p^\epsilon$. Recorde-se que um estado pertence sempre o seu fecho-ϵ, pelo que, em particular, q' pode ser q e p' pode ser p. Quanto aos estados finais do AFND, eles são todos os estados finais do AFND$^\epsilon$ aos quais se junta o estado inicial do AFND$^\epsilon$quando no fecho-ϵ deste estado inicial está presente algum estado final do AFND$^\epsilon$. Com efeito, neste caso, a sequência vazia faz parte da linguagem do AFND$^\epsilon$ e, como se sabe, a única forma de a sequência vazia fazer parte da linguagem de um AFND é o seu estado inicial ser também estado final.

Apresenta-se agora a definição de AFND resultante de AFND$^\epsilon$.

Definição 1.16 AFND RESULTANTE DE AFND$^\epsilon$
Dado um AFND$^\epsilon$ $A^\epsilon = (Q, I, \delta, q_0, F)$, o AFND *resultante de* A^ϵ é o AFND *afnd*(A^ϵ) $= (Q, I, \delta', q_0, F')$ em que

- $\delta' : Q \times I \to 2^Q$ é tal que

  $$\delta'(q,a) = \bigcup_{q' \in q^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',a)} q''^\epsilon)$$

  para cada $q \in Q$ e $a \in I$;

- $F' = F$ se $q_0^\epsilon \cap F = \emptyset$ e $F' = F \cup \{q_0\}$ caso contrário. ◀

A linguagem reconhecida por *afnd*(A^ϵ) é precisamente L_{A^ϵ}. Esta propriedade de *afd*(A^ϵ) é enunciada na Proposição 1.22. Apresenta-se agora um exemplo que ilustra a construção do AFND resultante de um AFND$^\epsilon$.

Exemplo 1.17 Considere-se o AFND$^\epsilon$ A^ϵ apresentado no Exemplo 1.3. Recorde que os fechos-ϵ dos estados de A^ϵ foram calculados no Exemplo 1.17.

Como exemplo calculam-se algums valores de δ':

- $$\begin{aligned}\delta'(p_0,a) &= \bigcup_{q' \in p_0^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',a)} q''^\epsilon)\\ &= \bigcup_{q' \in \{p_0,p_1,p_5\}} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',a)} q''^\epsilon)\\ &= (\bigcup_{q'' \in \delta(p_0,a)} q''^\epsilon) \cup (\bigcup_{q'' \in \delta(p_1,a)} q''^\epsilon) \cup (\bigcup_{q'' \in \delta(p_5,a)} q''^\epsilon)\\ &= (\bigcup_{q'' \in \{p_1\}} q''^\epsilon) \cup (\bigcup_{q'' \in \{p_2,p_3\}} q''^\epsilon) \cup (\bigcup_{q'' \in \emptyset} q''^\epsilon)\\ &= p_1^\epsilon \cup p_2^\epsilon \cup p_3^\epsilon\\ &= \{p_1,p_2,p_3,p_5\};\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\delta'(p_4,b) &= \bigcup_{q' \in p_4^\epsilon} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} q''^\epsilon)\\ &= \bigcup_{q' \in \{p_1,p_4,p_5\}} (\bigcup_{q'' \in \delta(q',b)} q''^\epsilon)\\ &= (\bigcup_{q'' \in \delta(p_1,b)} q''^\epsilon) \cup (\bigcup_{q'' \in \delta(p_4,b)} q''^\epsilon) \cup (\bigcup_{q'' \in \delta(p_5,b)} q''^\epsilon)\\ &= (\bigcup_{q'' \in \emptyset} q''^\epsilon) \cup (\bigcup_{q'' \in \emptyset} q''^\epsilon) \cup (\bigcup_{q'' \in \emptyset} q''^\epsilon)\\ &= \emptyset;\end{aligned}$$

Os outros casos obtêm-se de forma semelhante. Relativamente aos estados finais, observe-se que p_0 é o estado inicial de A^ϵ e $p_5 \in p_0^\epsilon$, pelo que p_5 é estado final de *afnd*(A^ϵ).

O AFND resultante de A^ϵ é então *afnd*(A^ϵ) $= (Q, I, \delta', p_0, F')$ em que

- $\delta' : Q \times I \to 2^Q$ é tal que

δ'	a	b	c
p_0	$\{p_1,p_2,p_3,p_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
p_1	$\{p_2,p_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
p_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{p_1,p_4,p_5\}$
p_3	$\emptyset$	$\{p_1,p_4,p_5\}$	$\emptyset$
p_4	$\{p_2,p_3,p_5\}$	$\emptyset$	$\{p_5\}$
p_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $F' = \{p_0, p_5\}$

A linguagem reconhecida por *afnd*(A^ϵ) é L_{A^ϵ}. ▲

Estuda-se agora o problema de construir um AFD equivalente a um AFND dado. Num AFND com função de transição δ, para cada estado q e cada símbolo a, $\delta(q, i)$ é um conjunto de estados, pois, como se sabe, a partir de q podem existir transições associadas a i para vários estados. Para construir o AFD haverá que transformar estas várias transições associadas a i a partir de q numa só transição.

Considerando por exemplo o estado inicial q_0 do AFND, $\delta(q_0, i)$ é o conjunto dos estados para os quais existe uma transição a partir de q_0 associada a i. No AFD estas várias transições têm de ser transformadas numa só. A ideia é então considerar este conjunto $\delta(q_0, i)$ como *um* estado do AFD e considerar uma transição associada a i do estado inicial para este estado. Esta transição é a forma de transferir para o AFD a informação sobre o facto de no AFND ser possível atingir cada um dos estados em $\delta(q_0, a)$ através de uma transição associada ao símbolo i. Como exemplo considere-se o AFND do Exemplo 1.4, cujo estado inicial é p. Dado que $\delta(p, 0) = \{p, r\}$, no AFD pretendido vai existir o estado $\{p, r\}$ e uma transição para $\{p, r\}$ associada a 0 a partir do estado $\{p\}$ (todos os estados deste AFD vão ser conjuntos).

A questão seguinte é saber quais são no AFD as transições a partir do estado $\delta(q_0, a)$ associadas aos diferentes símbolos. Para simplificar a exposição, designe-se este estado por q_D. Para cada símbolo i, a transição no AFD a partir de q_D é obtida reunindo todos os estados para os quais existe no AFND uma transição associada a i a partir de um estado incluído em q_D. Isto é, calcula-se $\delta(q', i)$ para cada $q' \in q_D$ e faz-se a união dos conjuntos assim obtidos. Esta união é novo estado do AFD e vai considerar-se então uma transição associada a i de q_D para este novo estado. Voltando ao Exemplo 1.4, calcula-se $\delta(q', 0)$ para cada $q' \in \{p, r\}$ e considera-se a sua união: $\delta(p, 0) \cup \delta(r, 0) = \{p, r\} \cup \{s\} = \{p, r, s\}$. O conjunto $\{p, r, s\}$ é então um estado do AFD pretendido e nele vai existir uma transição de $\{p, r\}$ para $\{p, r, s\}$ associada ao símbolo 0.

Todos os estados do AFD são conjuntos constituídos por estados do AFND e são obtidos da forma acima descrita, começando-se pelo estado inicial do AFND. O estado inicial do AFD é precisamente o estado inicial do AFND, representado agora como conjunto, isto é, $\{q_0\}$. Todas as transições do AFD são também obtidas como descrito. Como consequência, se no AFND existe um caminho que começa num certo estado q e termina num estado q' e a este caminho está associada um palavra w, então no AFD vai também existir um caminho a que está associada esta palavra, caminho esse que começa num estado que inclui q e termina num estado que inclui q'. É fácil então compreender que, para que os autómatos reconheçam a mesma linguagem, os estados finais do AFD tenham de ser todos aqueles estados do AFD que incluem um ou mais estados finais do AFND.

Define-se seguidamente o AFD resultante de um AFND.

Definição 1.18 AFD RESULTANTE DE AFND
Dado um AFND $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$, o AFD *resultante de A* é o AFD *afd*$(A) = (Q', I, \delta', q'_0, F')$ em que

- Q' é o conjunto definido indutivamente como se segue:

– $\{q_0\} \in Q'$;
– para cada $a \in I$,
se $q' \in Q'$ e $\bigcup_{p\in q'} \delta(p,a) \neq \emptyset$ então $\bigcup_{p\in q'} \delta(p,a) \in Q'$;

- $q'_0 = \{q_0\}$;
- $\delta' : Q' \times I \to Q'$ é tal que

$$\delta'(q',a) = \begin{cases} \bigcup_{p\in q'} \delta(p,a) & \text{se } \bigcup_{p\in q'} \delta(p,a) \neq \emptyset \\ \text{não def} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para cada $q' \in Q'$ e $a \in I$;

- $F' = \{q' \in Q' : q' \cap F \neq \emptyset\}$. ◄

Cada estado do autómato *afd*(A) é um conjunto de estados do AFND A. O conjunto dos estados Q' de *afd*(A) é finito porque o conjunto dos estados de A é finito. Note-se que a função de transição δ' de *afd*(A) está bem definida, isto é, para cada $q' \in Q'$ e cada $a \in I$, $\delta'(q',a) \in Q'$. A linguagem reconhecida por *afd*(A) é precisamente L_A. Esta propriedade de *afd*(A) é enunciada na Proposição 1.21. Apresentam-se agora dois exemplos que ilustram a construção de AFDS resultantes de AFNDS.

Exemplo 1.19 Considere-se o AFND $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ apresentado no Exemplo 1.4. O objectivo é construir o AFD resultante do AFND A, *afd*(A). Neste primeiro exemplo começa-se por descrever com detalhe a construção do conjunto dos estados Q' de *afd*(A), recordando que o estado inicial de A é p:

1. $\{p\} \in Q'$;
2. por 1, $\bigcup_{x\in\{p\}} \delta(x,a) \in Q'$ com $a \in \{0,1\}$, logo
   - $\delta(p,0) = \{p,r\} \in Q'$;
   - $\delta(p,1) = \{p,q\} \in Q'$;
3. por 2, $\bigcup_{x\in\{p,r\}} \delta(x,a) \in Q'$ e $\bigcup_{x\in\{p,q\}} \delta(x,a) \in Q'$ com $a \in \{0,1\}$, logo
   - $\delta(p,0) \cup \delta(r,0) = \{p,r,s\} \in Q'$;
   - $\delta(p,1) \cup \delta(r,1) = \{p,q\} \in Q'$;
   - $\delta(p,0) \cup \delta(q,0) = \{p,r\} \in Q'$;
   - $\delta(p,1) \cup \delta(q,1) = \{p,q,s\} \in Q'$;
4. por 3, e dado que os casos de $\{p,q\}$ e $\{p,q\}$ já foram considerados, há apenas que calcular $\bigcup_{x\in\{p,r,s\}} \delta(x,a)$ e $\bigcup_{x\in\{p,q,s\}} \delta(x,a)$ com $a \in \{0,1\}$, pelo que
   - $\delta(p,0) \cup \delta(r,0) \cup \delta(s,0) = \delta(p,0) \cup \delta(r,0) \cup \emptyset = \{p,r,s\} \in Q'$;
   - $\delta(p,1) \cup \delta(r,1) \cup \delta(s,1) = \delta(p,1) \cup \delta(r,1) \cup \emptyset = \{p,q\} \in Q'$;
   - $\delta(p,0) \cup \delta(q,0) \cup \delta(s,0) = \delta(p,0) \cup \delta(q,0) \cup \emptyset = \{p,r\} \in Q'$;

- $\delta(p,1) \cup \delta(q,1) \cup \delta(s,1) = \delta(p,1) \cup \delta(q,1) \cup \emptyset = \{p,q,s\} \in Q'$.

Note-se que no passo 4 já não se encontraram estados de Q' que não tivessem sido já calculados. Conclui-se asim que

$$Q' = \{\{p\}, \{p,r\}, \{p,q\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}\}$$

Como exemplo calculam-se agora alguns valores de δ':

- $\delta'(\{p\},0) = \bigcup_{x\in\{p\}} \delta(x,0) = \delta(p,0) = \{p,r\}$;
- $\delta'(\{p,r\},0) = \bigcup_{x\in\{p,r\}} \delta(x,0) = \delta(p,0) \cup \delta(r,0) = \{p,r,s\}$.

Os outros casos obtêm-se de forma semelhante. Tem-se então que o AFD pretendido é $\mathit{afd}(A) = (Q', I, \delta', q_0', F')$ em que

- $Q' = \{\{p\}, \{p,r\}, \{p,q\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}\}$;
- $q_0' = \{p\}$;
- $\delta' : Q' \times I \to Q'$ é tal que

δ'	0	1
$\{p\}$	$\{p,r\}$	$\{p,q\}$
$\{p,r\}$	$\{p,r,s\}$	$\{p,q\}$
$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{p,q,s\}$
$\{p,q,s\}$	$\{p,r\}$	$\{p,q,s\}$
$\{p,r,s\}$	$\{p,r,s\}$	$\{p,q\}$

- $F' = \{\{p,q,s\}, \{p,r,s\}\}$.

A linguagem reconhecida por $\mathit{afd}(A)$ é a linguagem L_A. Compare este AFD com o AFD construído no Exemplo 1.12. ▲

Exemplo 1.20 Considere-se o AFND $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ apresentado no Exemplo 1.13. O objectivo é de novo construir $\mathit{afd}(A)$. Tem-se então que $\mathit{afd}(A) = (Q', I, \delta', q_0', F')$ em que

- $Q' = \{\{p\}, \{p,q\}, \{p,r\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}, \{p,q,s,t\},$
  $\{p,r,s,t\}, \{p,r,t\}, \{p,q,t\}\}$;
- $q_0' = \{p\}$;
- $\delta' : Q' \times I \to Q'$ é tal que

δ'	0	1
$\{p\}$	$\{p,r\}$	$\{p,q\}$
$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{p,q,s\}$
$\{p,r\}$	$\{p,r,s\}$	$\{p,q\}$
$\{p,q,s\}$	$\{p,r,t\}$	$\{p,q,s,t\}$
$\{p,r,s\}$	$\{p,r,s,t\}$	$\{p,q,t\}$
$\{p,q,s,t\}$	$\{p,r,t\}$	$\{p,q,s,t\}$
$\{p,r,s,t\}$	$\{p,r,s,t\}$	$\{p,q,t\}$
$\{p,r,t\}$	$\{p,r,s\}$	$\{p,q\}$
$\{p,q,t\}$	$\{p,r\}$	$\{p,q,s\}$

- $F' = \{\{p, q, s, t\}, \{p, r, s, t\}, \{p, r, t\}, \{p, q, t\}\}$.

A linguagem reconhecida por *afd*(A) é a linguagem L_A. Compare este AFD com o AFD construído no Exemplo 1.13. ▲

Enunciam-se agora as propriedades dos autómatos AFNDD, AFDA e AFNDA^ϵ acima referidas.

Proposição 1.21 Dado um AFD D, a linguagem de *afnd*(D) é L_D. ■

Proposição 1.22 Dado um AFND$^\epsilon$ A^ϵ, a linguagem de *afnd*(A^ϵ) é L_{A^ϵ}. ■

Proposição 1.23 Dado um AFND A, a linguagem de *afd*(A) é L_A. ■