O Teorema de Fermat: um problema em aberto?

Margarida Mendes Lopes

Departamento de Matemática da FCUL

[1]2000 MATEMÁTICA $\sqrt{\text{RADICAL}}$ [O TEOREMA DE FERMAT: UM PROBLEMA EM ABERTO?]1

Não, não é um problema em aberto. Foi finalmente demonstrado na última década do século XX, recorrendo a métodos geométricos. Afinal o que é o (último) teorema de Fermat? O que tem a ver com Geometria?

O teorema de Fermat é a afirmação feita por Fermat :

Para todo o $n \geq 3$ não existem números **naturais** a, b, c tais que

$$a^n + b^n = c^n.$$

Esta afirmação ficou conhecida como o último teorema de Fermat. Em rigor deveria ser conhecida como a conjectura de Fermat dado que não existiu nenhuma demonstração até aos finais do século XX. Este problema capturou a imaginação de muitos e as tentativas in-

Palestra proferida no dia 6 de Abril de 2000, integrada no ciclo "2000 matemática $\sqrt{\text{radical}}$" do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Este texto é uma versão expandida de um texto publicado no volume 60 da revista "Educação e Matemática" (Novembro - Dezembro de 2000).

frutíferas de demonstração levaram a grandes avanços no conhecimento da Matemática. Aconselha-se o leitor que queira saber os detalhes (por vezes quase romanescos) da longa história das tentativas de demonstração deste teorema a ler o belíssimo livro de Simon Singh [1].

Qual é afinal a relação com a geometria? Talvez se compreenda melhor se pensarmos na origem deste teorema. Veio de uma observação feita por Fermat (1601-1665) na margem da tradução feita para Latim por Bachet do Tratado de Aritmética de Diofanto. Ao lado da passagem que apresentava as soluções naturais da equação $x^2 + y^2 = z^2$ (ou seja a forma geral de todos os ternos pitagóricos) Fermat escreveu que para $n \geq 3$ não existiam tais soluções e acrescentou (em Latim) "Tenho uma demonstração admirável mas esta margem é demasiado pequena para a conter". Fermat tinha feito, além desta, muitas outras afirmações e observações na sua cópia do Tratado de Aritmética. Depois da morte de Fermat o seu filho publicou uma edição do tratado de Aritmética com todas estas anotações e assim passou para a posteridade o "último teorema de Fermat".

A relação com os ternos pitagóricos aponta já para uma relação com a geometria. De facto uma das formas de resolver o problema da determinação de todos os ternos pitagóricos é exactamente através da geometria. Com efeito da equação $x^2 + y^2 = z^2$ podemos passar à equação $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ e o problema transforma-se em determinar os pontos do plano (a, b) pertencentes à circunferência $\mathcal{C}$ de raio 1 e centro em $(0, 0)$ tais que a e b se escrevem como quociente de dois números inteiros ou seja tais que a e b são números racionais. O ponto $P := (0, 1)$ é um desses pontos. P pertence à recta definida por $x = 0$ e esta recta intersecta a circunferência noutro ponto de coordenadas racionais, o ponto $(0, -1)$. Qualquer outra recta r a passar por P é da forma $y = mx + 1$, onde m e um número real e é fácil que o outro ponto onde a recta r intersecta a circunferência é racional se e só se m for também um número racional. Inversamente se $Q := (a, b)$ for outro ponto qualquer de coordenadas racionais de $\mathcal{C}$ a recta que passa por P e Q é da forma $y = mx + 1$, onde o declive $m = \frac{b-1}{a}$ é um número racional. Assim temos uma forma geométrica de determinar todos os pontos de coordenadas racionais de $\mathcal{C}$ tomando as intersecções de $\mathcal{C}$ com as rectas que passam por P

e têm declive racional.

Poder-se-ia pensar que o mesmo tipo de processo aplicado agora não à circunferência mas à curva definida por $x'^n + y'^n = 1$ possibilitaria uma resolução do teorema de Fermat mas tal não acontece.

Ainda hoje se discute se Fermat teria de facto uma demonstração. No entanto o ponto sobre o qual não há discussão é que Fermat não podia ter a demonstração apresentada por Andrew Wiles durante os anos 90. De facto o que Wiles demonstrou (parcialmente), utilizando muitas técnicas só descobertas no século XX , foi a conjectura de Taniyama-Shimura formulada nos anos 50, da qual decorre o teorema de Fermat.

Andrew Wiles é um matemático inglês estabelecido nos Estados Unidos e especialista num ramo da matemática chamado Geometria Aritmética, que estuda problemas de teoria de números usando técnicas geométricas. Mais concretamente Wiles é um especialista em *curvas elípticas*. As curvas elípticas são curvas definidas no plano por uma equação polinomial do 3º grau a duas incógnitas e uma curva elíptica diz-se racional se os coeficientes desta equação forem números racionais. Uma classe importante destas curvas é formada pelas curvas que são definidas no plano por uma equação do tipo

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

com $a \neq 0$, a, b, c, d números racionais e onde o polinómio $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem três raízes distintas (reais ou não).

A conjectura de Taniyama-Shimura, formulada durante os anos 50, diz que todas as curvas elípticas racionais estão associadas a formas modulares. As formas modulares são objectos analíticos muito complicados e aparentemente nada tendo a ver com geometria. Muito imprecisamente as formas modulares são funções complexas definidas por séries de potências e que gozam de várias simetrias especiais. Esta conjectura foi formulada originalmente por Taniyama, um matemático japonês, baseada no facto de ter conseguido associar a algumas curvas elípticas uma forma modular. Mais tarde o seu amigo e colega Goto Shimura mostrou que a cada forma modular estava associada uma curva elíptica racional. No entanto o problema de saber se a cada curva elíptica racional estava associada uma forma modular permaneceu em aberto.

Nos anos 80 o matemático alemão G. Frey estudou as propriedades das curvas definidas por equações da forma

$y^2 = x(x - A)(x - B)$, com A, B números inteiros, em função da diferença $A - B = C$.

Em particular considerou as curvas (chamadas posteriormente curvas de Frey)

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$$

obtidas a partir de uma hipotética solução inteira de $a^n + b^n = c^n$, para $n > 2$. Só existiria uma destas curvas se a conjectura de Fermat não fosse verdade. Frey verificou que cada uma destas curvas, se existisse, teria propriedades estranhas, muito diferentes de outras curvas elípticas. Em 1985 num congresso em Oberwolfach, na Floresta Negra, apresentou os seus resultados sobre estas curvas e conjecturou que não estavam associada a uma forma modular (abreviadamente não eram modulares). O americano Ken Ribet começou a trabalhar nesta conjectura tendo finalmente em 1986 mostrado que de facto as curvas de Frey não eram modulares. O resultado de Ribet mostrava que se o teorema de Fermat fosse falso então a conjectura de Taniyama-Shimura também era falsa.

O sonho de infância de Wiles tinha sido demonstrar o teorema de Fermat. Crescendo tinha abandonado esse sonho e tinha-se dedicado às curvas elípticas. Quando Wiles ouviu falar do resultado de Ribet viu uma estrada para realizar o seu sonho. Abandonando todos os outros projectos durante sete anos dedica-se a tentar demonstrar a conjectura de Taniyama-Shimura e finalmente em Junho de 1993, em Cambridge, apresenta a demonstração da conjectura de Taniyama-Shimura para uma larga classe de curvas elípticas racionais, incluindo as curvas elípticas definidas por equações do tipo

$$y^2 = x(x - r)(x - s)$$

com r, s inteiros primos entre si tais que $rs(r - s)$ é divísivel por 16. Esta classe em particular incluíria as curvas de Frey se existissem. Como Ribet tinha mostrado que as curvas de Frey, se existissem, não eram modulares, concluía-se que as curvas de Frey não existiam e portanto também não existiam soluções inteiras das equações $a^n + b^n = c^n$, para $n > 2$, tal como Fermat tinha afirmado.

Esta demonstração de Wiles utilizava muitas técnicas matemáticas recentes de várias áreas da Matemática e era extremamente complexa. Durante os meses seguintes a demonstração foi verificada por vários especialistas, mas foi descoberta uma falha. A demonstração continuava válida para uma grande classe de curvas elípticas que, no entanto, não incluía as curvas de Frey. Portanto o resultado de Wiles, embora continuando a ser importante, não demonstrava o teorema de Fermat.

Wiles tornou a concentrar-se no problema. Com o auxílio do seu antigo aluno Richard Taylor e utilizando um caminho anteriormente abandonado conseguiu demonstrar em Setembro de 1994 o resultado para a classe de curvas elípticas que incluíria a curva de Frey, fechando assim finalmente a saga do Teorema de Fermat. A demonstração é muito complexa tendo sido publicada em dois artigos, [2], [3], e dada a diversidade de técnicas sofisticadas utilizadas possívelmente só existem 20 ou 30 matemáticos no mundo capazes de a compreender completamente.

Wiles fez 40 anos em 1994 e à data do Congresso Internacional de Matemática em Agosto de 1994 não tinha ainda corrigido a falha na sua demonstração, pelo que não chegou a receber a medalha Fields (o equivalente ao prémio Nobel para matemática mas que só pode ser atribuído a matemáticos que ainda não tenham 40 anos). No entanto no Congresso Internacional seguinte em 1998, em Berlim foi-lhe atribuído um prémio especialmente criado para ele.

A demonstração do teorema de Fermat encerrou um capítulo na história da Matemática mas não é uma conclusão. Talvez seja ainda mais importante por ser o começo de um novo e excitante capítulo. Em primeiro lugar o resultado de Wiles deu um novo ânimo ao estudo da conjectura de Taniyama-Shimura, que foi finalmente demonstrada em 1999 para todas as curvas elípticas por C.Breuil, F. Diamond, B. Conrad e R.Taylor. Em segundo lugar vários dos métodos usados por Wiles têm sido aprofundados e aplicados frutuosamente à resolução de outros problemas em aberto. Finalmente a conjectura (agora teorema) de Taniyama-Shimura é a primeira pedra sólida de uma vasta teoria, conhecida como o programa de Langlands, proposta nos anos 60 pelo matemático canadiano Robert Langlands. Essencialmente o programa de Langlands é a procura de unificação de várias teorias

matemáticas, não muito diferente das teorias unificadoras procuradas em Física.

Só nos resta esperar que este novo capítulo não leve tanto tempo a ser concluído como o anterior.

Bibiliografia

[1] S. Singh, "A solução do último teorema de Fermat", Ed. Relógio d'Água, 1988.

[2] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math. II Ser. 141 (1995), 443-551.

[3] R. Taylor, A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. Math. II Ser. 141 (1995), 553-572.

Classificação AMS 2000: 11G05 11D41 11F11

Margarida Mendes Lopes
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências
Campo Grande, Edifício C1, 3º piso, 1749-016 Lisboa
mmlopes@lmc.fc.ul.pt