Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais, Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente
1º ano/1ºSemestre — 2006/07

2^{a} **Lista: DETERMINANTES**

---

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Considere por hipótese que $\det(A) = -7$. Calcule

$a)$ $\det(3A)$ $\quad$ $b)$ $\det(2A^{-1})$ $\quad$ $c)$ $\det((2A)^{-1})$ $\quad$ $d)$ $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Reduza a matriz A a uma matriz R em escada de linhas, e use o determinante de R para calcular o determinante de A.

3. Se possível, dê exemplos de:

a) Uma matriz de ordem 3 com todas as entradas não nulas e determinante nulo.

b) Uma matriz do tipo 2×3 com determinante igual a 2.

c) Uma matriz de ordem 3 com a diagonal principal nula e determinante $-\frac{2}{3}$.

d) Uma matriz de ordem 4 com a segunda coluna nula e determinante igual a 5.

4. Sejam A e B matrizes de ordem n, quaisquer. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

a) Se $\det A = \det B$, então $A = B$.

b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

c) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\det(\alpha A) = \alpha \det A$.

d) Se n é ímpar, então $\det(-A) = -\det A$.

e) Se P é uma matriz invertível de ordem n, então $\det(P^{-1}AP) = \det A$.

f) Se $car\,(A) = n - 1$, então $\det(A) = 0$.

g) Se AB é uma matriz invertível então A e B também o são.

h) Se AB não é uma matriz invertível então pelo menos uma das duas matrizes A ou B também não é invertível.

5. Mostre que uma matriz quadrada A é invertível se e só se a matriz $A^T A$ é invertível.

6. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ é satisfeita a equação

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Mostre as igualdades seguintes, sem calcular os determinantes.

$$a)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

9. Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ utilizando a regra de Laplace.

10. Para que valor(es) de k a matriz A deixa de ser invertível?

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$$

11. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Cacule o determinante de M.
(b) Calcule det $(2M)$, det $(2M^{-1})$ e det $((2M)^{-1})$.
(c) Diga qual é o elemento $(1,4)$ da matriz M^{-1}.

12. Calcule det $(\frac{1}{3}(A^5(x))$ onde $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

---

Exercícios de escolha múltipla

---

13. O valor do determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é:

☐ -12α ☐ 0 ☐ 12α ☐ 2α

---

14. Considere A e B duas matrizes quadradas de ordem 3 e a seguinte lista de afirmações.

I) det $AB =$ det BA.
II) Se det $A = 0$ e det $B = 0$ então det $(A+B) = 0$.
III) det $(2AB) = 8$ det (AB).

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ I e III ☐ II e III ☐ I e II e III
