Respostas do teste de dia 7 de Novembro de 2005

1. Opção correcta: II e III.

Observação: Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se $\det A = 5$ e $\det(A + A^T) = 40$

2. Opção correcta: I e IV.

Observação: Uma matriz quadrada pode ter determinante $\neq 0$ tendo zeros na diagonal principal.

3. Opção correcta: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } x + y = -z\}$.

4. Opção correcta: $\dim S = 3$.

5. O determinante de A é 2 e a entrada $(1, 3)$ de A^{-1} é $\frac{1}{2}$.

6. Se $\alpha \neq 1$, uma base para $N(A_\alpha)$ é formada pelo vector $(-3, 0, 1)$, e a dimensão do espaço de linhas e a do espaço de colunas de A_α é 2.

Se $\alpha = 1$, uma base de $N(A_1)$ é $\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$ e a dimensão do espaço de linhas e a do espaço de colunas de A_1 é 1.

Observação: Por eliminação de Gauss, obtemos a partir de A_α a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 - 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e tem-se

$N(A_\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0 \text{ e } y = 0\} =$
$= \{(-3z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, se $\alpha \neq 1$, e
$N(A_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} =$
$= \{(-2y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

7. (Resolução completa)

Seja $v = (x_1, ..., x_p)$ um elemento do núcleo de D. Por definição de nucleo ,

$D \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ ... \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$. Multiplicando à esquerda pela matriz C, obtemos

$CD \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ ... \\ x_p \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, por definição de núcleo de uma matriz, concluímos que v pertence ao núcleo de CD.

Como v era um elemento qualquer do núcleo de D, tem-se que $N(D) \subset N(CD)$.