Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química

1º Semestre — 3 Jan. 2006

Nome:______________________________________________

Número:______________________________ Curso:__________

**Indique qual ou quais dos testes entrega:**

1º Teste ☐ 1º Teste e 2º Teste ☐

2º Teste ☐

---

**A preencher pelo aluno**

| Pergunta | Nº das pág. onde está a resolução |
|---|---|
| T1- 9 a) | |
| T1- 9 b) | |
| T1- 9 c) | |
| T1- 10 a) | |
| T1-10 b) | |
| T1-11 | |
| T1-12 | |
| T2-21 | |
| T2-22 a) | |
| T2-22 b) | |
| T2-23 a) | |
| T2-23 b) | |
| T2-24 | |

**A preencher pelo docente**

| Pergunta | Classificação | Cotação |
|---|---|---|
| 9 a) | | 2.5 |
| 9 b) | | 1.9 |
| 9 c) | | 1.5 |
| 10 a) | | 1.5 |
| 10 b) | | 1 |
| 11 | | 1 |
| 12 | | 1 |
| 21 | | 2.5 |
| 22 a) | | 1.7 |
| 22 b) | | 1.7 |
| 23 a) | | 2 |
| 23 b) | | 1.5 |
| 24 | | 1 |
| EM-Cert. | | |
| EM-Erra. | | |
| EM-Total | | |

| Registo: | Nota: |
|---|---|

---

**Leia as instruções na página seguinte**

**Instruções**

1º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 1 a 12

2º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 13 a 24.

1º Teste + 2º Teste (duração: 3h00m): Todas as perguntas.

**Cotações**: Perguntas de escolha múltipla: Certa: **1.2 val.** Errada: **- 0.4val.** Para quem entregar o 1º Teste e o 2º Teste a classificação será dada pela média: $(T1 + T2)/2$.

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas neste enunciado, e as perguntas de desenvolvimento em caderno separado.
- **Identifique** e **numere** as páginas do seu caderno de respostas. Se **interromper** uma resposta, **indique**, no sítio onde a interrompeu, o número da página onde vai continuar a resolução.
- Antes de entregar o teste certifique-se que a **tabela da esquerda** (página anterior) está bem preenchida. Nesta tabela marque com um **traço** as linhas correspondentes às perguntas a que não respondeu. Certifique-se ainda que assinalou qual ou quais dos testes respondeu.

# Início do 1º Teste

**1.** Considere a seguinte lista de afirmações: **[1.2]**

I. Todo o vector de $\mathbb{R}^2$ se escreve como uma combinação linear de $(1,1)$ e $(-1,1)$.

II. Os vectores $(2,\sqrt{2})$ e $(5,\sqrt{2})$ são linearmente independentes.

III. $\{(1,1),(2,3),(\sqrt{2},\sqrt{3})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

IV. $\{(2,6),(\sqrt{2},3\sqrt{2})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ II e IV ☐ III e IV ☐ I e II e IV

---

**2.** Seja $A$ uma matriz $3\times 3$ tal que $A^3 = I$ ($I$ a matriz identidade) e $b \in \mathbb{R}^3$. Considere as afirmações: **[1.2]**

I. O sistema $Ax = 0$ tem várias soluções.

II. O sistema $Ax = b$ tem solução $x = A^2 b$.

III. A característica da matriz aumentada $[A|b]$ é inferior a 3.

IV. A característica da matriz $A$ e da matriz aumentada $[A|b]$ são iguais.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e III ☐ II e IV ☐ I e II e III ☐ III e IV

---

**3.** Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \\ \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{bmatrix}$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira **[1.2]**

☐ A característica de $A$ é 1 para $\alpha = 2$.

☐ A característica de $A$ é igual a 2 para qualquer $\alpha$.

☐ O núcleo de $A$ tem dimensão 2.

☐ O espaço das colunas de $A$ tem dimensão 3 para $\alpha = 2$.

---

**4.** Sendo $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ \beta & 5 & \beta \\ d & 0 & f \end{bmatrix}$, considere as afirmações: **[1.2]**

I. A é invertível para qualquer valor de $\alpha$.
II. $\det(A - 5I) = 0$.
III. O determinante de $A$ depende do valor de $\beta$.
IV. $\det((2A)^2) = 4(\det(A))^2$.

A lista <u>completa</u> das afirmações correctas é:

☐ I e III ☐ II e IV ☐ II e III e IV ☐ II.

---

**5.** Os valores de $\alpha$ para os quais os vectores $(1, 0, 1)$, $(1, 1, -1)$ e $(\alpha, 2, 0)$ são linearmente independentes são: **[1.2]**

☐ $\alpha \neq 2$ ☐ $\alpha \neq 0$ ☐ $\alpha \neq 4$ ☐ $\alpha \neq -1$

---

**6.** Se as coordenadas de um vector $x$ na base ordenada $B = (u, v)$ são $x_B = (2, 4)$ então as coordenadas de $x$ na base $(u + v, u - v)$ são: **[1.2]**

☐ $(1, -1)$. ☐ $(3, -1)$. ☐ $(1, 2)$. ☐ $(6, 3)$.

---

**7.** Seja $S = \{u, v, w\} \subseteq \mathbb{R}^3$ em que $u = v + w$ e $A$ a matriz cujas linhas são os vectores de $S$. Considere as afirmações: **[1.2]**

I. O sistema $Ax = 0$ é indeterminado.
II. $\dim L(S) = 3$.
III. $L(S)$ não é um subespaço linear.
IV. O sistema $Ax = b$ é sempre possível para qualquer $b \in \mathbb{R}^3$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II e IV ☐ I ☐ III ☐ II e IV

---

**8.** Considere uma matriz $A$, $k \times n$, e $B$ uma matriz $n \times n$. Sabendo que o espaço das colunas de $BA^T$ tem dimensão 2, que o núcleo de $BA^T$ tem dimensão 1 e que o núcleo de $AB^T$ tem dimensão 5, então: **[1.2]**

☐ $n = 2$ e $k = 6$ ☐ $n = 7$ e $k = 3$ ☐ $n = 3$ e $k = 7$ ☐ $n = 4$ e $k = 3$.

---

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

**9.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$

a) Discuta o sistema $AX = b$ em termos dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$, indicando a solução geral. **[2.5]**

b) Para $\alpha = 1$ determine uma base para o espaço das colunas de $A$ e indique a dimensão do núcleo de $A$. **[1.9]**

c) Determine os valores de $\alpha$ para os quais $A$ é invertível. **[1.5]**

**10.** Considere $S = L(\{(1, 0, -1), (0, 1, 1), (2, 1, -1)\})$

a) Determine a dimensão de $S$ e uma sua base. **[1.5]**

b) Diga, justificando, se $(0, 0, 1)$ pertence a $S$. **[1.0]**

**11.** Dê um exemplo de uma matriz, $A$, $3 \times 4$ tal que $(1, 1, 0, 0)$ pertence ao núcleo de $A$ e $\dim EL(A) = 1$. **[1.0]**

**12.** Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: **[1.0]**

- O conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ é um subespaço linear.

$\boxed{\textbf{FIM do } 1^{\text{o}} \textbf{ Teste}}$

# Início do 2º Teste

**13.** Seja $A$ uma matriz diagonalizável que tem para polinómio característico $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.2]**

☐ A matriz $A$ é invertível.
☐ A dimensão do núcleo de $A$ é 2.
☐ A dimensão do espaço próprio $E(1)$ é 1.
☐ A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está nas condições do enunciado.

---

**14.** Para a matriz **[1.2]**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

considere a lista de afirmações:

I. Os valores próprios de $A$ são: 2 , 4 e 1.
II. -1 é um valor próprio de $A$ e $(1, 1, 0, 0)$ um vector próprio associado.
III. 4 é um valor próprio de $A$ e $(1, 1, 0, 0)$ um vector próprio associado.
IV. A matriz tem valores próprios de multiplicidade algébrica superior a 1.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ I e III ☐ III e IV ☐ II e IV

---

**15.** Considere a equação diferencial seguinte **[1.2]**

$$y''' + 2y'' - y' = 0.$$

Esta equação diferencial é equivalente ao sistema de equações diferenciais $z' = Az$ onde $A$ é a matriz

☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

---

**16.** Considere a equação diferencial seguinte **[1.2]**

$$y'' + y' = 6t + 3t^2.$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira, para $C_1$ e $C_2$ constantes arbitrárias.

☐ $t^3$ é a única solução desta equação.
☐ $C_1 e^t + t^3$ é a solução geral desta equação.
☐ $t^3 + C_1 + C_2 e^{-t}$ é a solução geral desta equação.
☐ A equação é uma equação diferencial de 2ª ordem homogénea.

---

**17.** Seja $W \in \mathbb{R}^3$ um subespaço e $b = w_1 + w_2$ tal que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.2]**

☐ O elemento de $W$ mais próximo de $b$ é $w_1$.
☐ $d(b, W) = \|w_1\|$.
☐ $w_1 = \mathrm{proj}_{W^\perp} b$.
☐ $w_2 = b - \mathrm{proj}_{W^\perp} b$.

---

**18.** Considere a lista de afirmações abaixo para as matrizes: **[1.2]**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

I. $A$ é anti-simétrica e ortogonal.
II. $B$ é anti-simétrica e ortogonal.
III. $B$ é simétrica e ortogonal.
IV. $AB$ é ortogonal

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e II e IV ☐ III e IV ☐ I e IV ☐ I e III

---

**19.** Seja $P$ uma matriz ortogonal, $S$ uma matriz invertível e $D$ uma matriz diagonal. Considere ainda **[1.2]**

$$A = PDP^{-1}, \quad B = SDS^{-1}$$

e a lista de afirmações seguintes:

I. $B$ é necessariamente simétrica.
II. $A$ é necessariamente simétrica.
III. $A$ e $B$ têm os mesmos valores próprios.
IV. $AA^T$ é simétrica.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ I e II e III ☐ II e III e IV ☐ II e IV

---

**20.** Considere a lista de afirmações seguintes para as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T_1(X) = AX$ e $T_2(X) = BX$ com **[1.2]**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I. $T_1$ representa uma reflexão em relação à recta $y = x$.
II. $T_2$ representa a projecção ortogonal sobre o eixo dos $xx$.
III. $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.
IV. $T_1 \circ T_2$ é uma transformação linear invertível .

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ I ☐ I e II e IV ☐ II e III

---

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

**21.** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz ortogonal $S$ e uma matriz diagonal $D$ tal que $S^{-1}AS = D$. **[2.5]**

**22.** Seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y = 0\}$.

a) Determine $W^\perp$. **[1.7]**
b) Determine a distância de $(3, 3, 0, 1)$ a $W$ bem como o elemento de $W$ mais próximo de $(3, 3, 0, 1)$. **[1.7]**

**23.** Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}$ o espaço das matrizes $2 \times 2$. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ a transformação linear $T(A) = A - A^t$.

a) Determine a matriz $K$ que representa $T$ em relação à base ordenada **[2.0]**

$$\mathcal{B}_2 = (E_1, E_2, E_3, E_4) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

b) Determine bases para o núcleo e para a imagem de $T$ e diga, justificando, se $T$ é injectiva ou sobrejectiva. **[1.5]**

**24.** Diga justificando se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte **[1.0]**

- Se $A$ é uma matriz $m \times n$ e $b \neq 0$ pertence ao núcleo de $A^T$ então o sistema $Ax = b$ é impossível.