Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

---

# $5^{a}$ **Lista de Exercícios**

---

**Problema 1.**
Exprima a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

**Problema 2.** Determine se os seguintes conjuntos de vectores são ou não linearmente independentes. Caso o não sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos.

a) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1 + t + t^2$ e $p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$.
b) No espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

**Problema 3.**
Diga quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares, e no caso afirmativo diga qual a sua dimensão e indique uma base.

a) W $= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$.
b) $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{Z}\}$.
c) Em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes invertiveis.
d) No espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 5, o conjunto dos polinómios $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ tais que $a_0 + a_1 = 0$.
e) $L(S)$, onde $S$ é o subconjunto do espaço das funções reais de variável real, com as operações usuais, definido por $S = \{\cos^2(t) - \sin^2(t), \cos(2t) + \sin(t), \sin(t)\}$.

**Problema 4.**
Mostre que se $U$ e $V$ são subespaços lineares de um espaço $W$, então $U \cap V$ e $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ também são subespaços lineares de $W$. Nota: $U + V$ é, por definição, o conjunto $\{u + v : u \in U, v \in V\}$

**Problema 5.**

Seja $V$ o espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

a) Diga qual a dimensão de $V$ e indique uma base ordenada para $V$. Indique as coordenadas do polinómio $(1-t)(1+t)$ nessa base.
b) Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S = \{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se $S$ é uma base para $V$.
c) Diga qual a dimensão do espaço linear $L(S)$, e determine uma base para esse espaço.
d) Seja $T$ o subconjunto de todos os polinómios de $V$ que se anulam em 0. Diga se $T$ é um subespaço linear de $V$. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base.

---

Exercícios de escolha múltipla

---

**6.** Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x + y - z = 0\right\}.$$

☐ $V$ não é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.
☐ $\{(1,2,0),(0,1,1)\}$ é uma base de $V$.
☐ $\{(1,2,0),(0,1,1),(1,3,1)\}$ é uma base de $V$.
☐ $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$ é uma base de $V$.

---

**7.** Sejam $u, v, w$ vectores linearmente independentes de um espaço linear real $U$. Então:
☐ A dimensão de $U$ é 3.
☐ A dimensão de $L(\{u, v, w, u+v\})$ é 4.
☐ A dimensão de $L(\{u, v, w, u+v\})$ é igual à dimensão de $L(\{u, v, w\})$.
☐ A dimensão de $U$ é inferior a 3.

---

**8.** Seja $B = (1, 1+t, 2t+t^2)$ uma base ordenada para o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Então as coordenadas de $p(t) = 3 + t + t^2$ na base $B$ são:

☐ $(8,-3,1)$ ☐ $(5,-1,1)$ ☐ $(6,-1,1)$ ☐ $(4,-1,1)$

---