Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

3^{a} Lista de Exercícios

Problema 1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Considere por hipótese que $\det(A) = -7$.
Calcule

a) $\det(3A)$ *b*) $\det(2A^{-1})$ *c*) $\det((2A)^{-1})$ *d*) $\det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

Problema 2. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ é satisfeita a equação

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 3. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 4. Usando a propriedade de linearidade do determinante escreva

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix}$$

como uma soma de quatro determinantes, em cujas entradas não figurem adições.

Problema 5. Diga, justificando, se é ou não verdadeira a igualdade:

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

Problema 6. Mostre as igualdades seguintes, sem calcular os determinantes.

$$a)\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Problema 7. Para que valor(es) de k a matriz A deixa de ser invertível?

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$$

Problema 8. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Cacule o determinante de M.
b) Calcule det $(2M)$, det $(2M^{-1})$ e det $((2M)^{-1})$.
c) Diga qual é o elemento $(1,4)$ da matriz M^{-1}.

Problema 9. Use o desenvolvimento de Laplace para calcular os determinantes das matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Além disso, calcule a inversa de A e de B sem utilizar o método de Eliminação de Gauss.

Problema 10. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares utilizando a regra de Cramer.

$$b)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$$

Exercícios de escolha múltipla

---

11. O valor do determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é:

☐ -12α ☐ 0 ☐ 12α ☐ 2α

---

12. Considere A e B duas matrizes quadradas de ordem 3 e a seguinte lista de afirmações.

I) $\det AB = \det BA$.
II) Se $\det A = 0$ e $\det B = 0$ então $\det (A+B) = 0$.
III) $\det (2AB) = 8 \det (AB)$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ I e III ☐ II e III ☐ I e II e III
