Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

9ª Lista de Exercícios

```
Nos exercícios em que não se especifica qual é o produto interno,
considere o produto interno usual (Euclideano) de ℝⁿ
```

Problema 1. Diga se existe algum valor de $k \in \mathbb{R}$ para o qual as matrizes seguintes são ortogonais:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 2 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix} \qquad (c) \begin{bmatrix} 2 & -k \\ k & 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 2. Utilize o processo de Gram-Schmidt e a normalização para transformar numa base ortonormal a base $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

Problema 3. Determine uma base ortonormada para

$$U = L\left((1,0,-1,0),(-1,2,0,1),(2,0,2,1),(2,2,1,1)\right).$$

Problema 4.
Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $y = 2x$. Determine $W^{\perp}$ e a distância do vector $(1,-1)$ aos subespaços W e $W^{\perp}$.

Problema 5. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine a decomposição $A = QR$, onde Q é uma matriz ortogonal e R uma matriz tringular superior.

Problema 6. Decida quais das expressões seguintes definem um produto interno. Em caso negativo indique qual (ou quais) dos axiomas de definição do produto interno não se verifica.

a) $\langle (u_1,u_2),(v_1,v_2)\rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$ em $\mathbb{R}^2$.
b) $\langle (u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)\rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$ em $\mathbb{R}^3$.
c) $\langle (u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)\rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$ em $\mathbb{R}^3$.
d) $\langle (u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)\rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ em $\mathbb{R}^3$.

Problema 7. Considere em $\mathbb{C}^2$ o produto interno usual e $u = (i, i)$ e $v = (1 + 2i, 1 - 2i)$.

a) Verifique se u e v são ou não ortogonais.
b) Determine $\text{proj}_v(u + v)$.

Problema 8. Seja $M_{2\times 2}$ o espaço linear real das matrizes reais, 2×2 e U o subespaço das matrizes anti-simétricas (i.e $A = -A^T$). Em $M_{2\times 2}$ considere o produto interno

$$\langle A, B\rangle = \text{tr}(AB^T), \tag{1}$$

onde tr designa o traço de uma matriz.

a) Mostre que $\langle\cdot, \cdot\rangle$ definido em (1) é um produto interno.
b) Determine a dimensão de U e de $U^\perp$.
c) Determine bases ortonormadas para U e para U^T.
d) Determine as projecções ortogonais de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ sobre U e sobre $U^\perp$.
e) Qual a matriz anti-simétrica mais próxima de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$?
f) Determine a distância de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ a U.

Problema 9. Determine uma equação para:

a) a recta que passa pelos pontos $(2, 2, 0)$ e $(1, 2, 1)$.
b) o plano que passa por $(1, 1, -1), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Problema 10. Determine a distância de $(2, 0, 1)$ ao plano $x - 2y - z = 0$, bem como o vector do plano mais próximo de $(0, 2, 1)$.

Problema 11. Diga se são simétricas, anti-simétricas, hermiteanas, anti-hermiteanas ou unitárias as matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

Problema 12. Seja A uma matriz anti-simétrica, $n \times n$, com n ímpar. Diga qual o valor de $\det(A)$. Dê um exemplo de uma matriz 3×3 anti-simétrica.

Problema 13. Mostre que toda a matriz A se pode escrever na forma $A = R + T$ onde R é simétrica e T anti-simétrica.

Problema 14. Sendo A e B matrizes reais simétricas. Diga qual o valor lógico das afirmações:

a) $A + B$ é simétrica.
b) AB é simétrica.
c) Se $AB = BA$ então AB é simétrica.

Problema 15. Seja A uma matriz real simétrica. Mostre que se u e v são vectores próprios de A associados a valores próprios distintos então u e v são ortogonais.

Problema 16.

Seja V um espaço linear real de dimensão n munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euclideano e A uma matriz $n \times n$ que verifica $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$. Mostre que:

a) $\|Av\| = \|v\|$, para todos os vectores $v \in V$.
b) A é invertível;
c) $\langle A^{-1}u, A^{-1}v \rangle = \langle u, v \rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$;
d) $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^{-1}v \rangle$, para todos os vectores $u, v \in V$;
e) Mostre que se λ é um valor próprio de A então $|\lambda| = 1$.

Problema 17. Considere um paralelipípedo definido pelos vectores $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 0, 1)$.

a) Determine a área do paralelogramo definido por u e v.
b) Determine a altura do paralelipípedo.
c) Determine o volume do paralelipípedo usando a noção de determinante de uma matriz. Use ainda os resultados das alíneas anteriores para confirmar o resultado obtido.