Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

8ª Lista de Exercícios

Nos exercícios em que não se especifica qual é o produto interno, considere o produto interno usual (Euclideano) de $\mathbb{R}^n$

Problema 1. Para os vectores $u = (4, 1, 4, 5)$, $v = (1, 2, 0, 2)$, calcule as expressões:

$(a)\ ||u+v|| \quad (b) \|u\|+\|v\| \quad (c) -3\|u\|+\|3u\| \quad (d)\ \dfrac{1}{\|v\|}v \quad (e)\ \left\|\dfrac{1}{\|v\|}v\right\| \quad (f) \angle(u, v).$

Problema 2. Diga para que valores de k os vectores seguintes são ortogonais:

$$(a)\ u = (2, 1, 3), v = (k, 1, 2) \qquad (b)\ u = (2, 1, 3, 4), v = (k, -1, 2k, 1).$$

Problema 3. Verifique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para os seguintes vectores.

$(a)\ u = (-3, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 3)$ $\qquad (b)\ u = (-4, 2, 1, 6, -1)$ e $v = (8, -4, -2, 2, 1)$

Problema 4. Determine todos os vectores u de $\mathbb{R}^2$ tais que o ângulo que u faz com o vector $(1, 2)$ é de $\frac{\pi}{3}$ radianos e $||u|| = 1$.

Problema 5. Para $u, v \in \mathbb{R}^n$ mostre a igualdade

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Dê uma interpretação geométrica desta igualdade para vectores de $\mathbb{R}^2$.

Problema 6. Mostre que se u e v são vectores ortogonais tais que $\|u\| = 1$ e $\|v\| = 2$ então a distância de u a v é $d(u, v) = \sqrt{5}$. Interprete este resultado geométricamente para vectores de $\mathbb{R}^2$.

Problema 7. Sejam $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ e $y = \left(\frac{2}{\sqrt{k}}, \frac{2}{\sqrt{k}}\right)$. Diga para que valores de $k \neq 0$ o conjunto $\{x, y\}$ é um conjunto ortonormado.

Problema 8. Designe por $\text{proj}_v\, u$ a projecção ortogonal do vector u sobre o vector v. Calcule $\text{proj}_{(1,2,3)}(3,0,1)$, $\text{proj}_{(1,2,3)}(-\pi,-2\pi,-3\pi)$, $\text{proj}_{(1,2,3)}(-2000,1000,0)$.

Problema 9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Sem efectuar quaisquer cálculos, justifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
- $\dim EL(A) + \dim N(A^T) = 4$.
- $\dim EC(A) + \dim N(A^T) = 4$.

b) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A.
c) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A^T.

Problema 10. Mostre que para uma matriz real A, $n \times k$, se tem a seguinte igualdade entre núcleos:
$$N(A) = N(A^T A).$$

Problema 11. Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço U, dado por

a) $U = L\left((1,1,-1,-1,1),(1,2,3,4,1),(2,1,-6,-7,1)\right)$.
b) $U = ((1,2,3,4),(2,4,6,8))$.

Problema 12. Seja W o plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $x - 2y + z = 0$. Encontre uma equação para $W^\perp$.

Problema 13. Seja W a recta de $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações paramétricas $x = 2t, y = -t, z = 4t$ $(-\infty < t < \infty)$. Determine uma equação para $W^\perp$.

Problema 14.
Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, W, gerado pelos vectores $u_1 = (0,1,0)$ e $u_2 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$.
Exprima $w = (1,2,3)$ na forma $w = w_1 + w_2$, em que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^\perp$.

Problema 15. Prove que as colunas de uma matriz A, $m \times n$, são ortogonais se e só se $A^T A$ é uma matriz diagonal, e são ortonormais se e só se $A^T A$ é a matriz identidade. A uma matriz com esta última propriedade chama-se matriz ortogonal.

Problema 16. Seja A uma matriz real, $n \times n$. Mostre que A é uma matriz ortogonal se e só se as colunas de A formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

Problema 17. Determine todas as matrizes ortogonais 2×2.

Problema 18. Seja A uma matriz real, $n \times k$, cujas colunas são linearmente independentes.

a) Mostre que $A^T A$ é invertível.
b) Mostre que $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ é uma matriz de projecção, isto é $P^2 = P$ (P diz-se idempotente).
c) Mostre que para qualquer $b \in \mathbb{R}^n$ se tem: $Pb = b$ se $b \in EC(A)$ e que $Pb = 0$ se $b \perp EC(A)$. Ou seja P é a matriz que dá a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre o espaço das colunas de A.

Exercícios de escolha múltipla

---

19. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\}$. Para o produto interno usual, uma base ortogonal para W é

☐ $\{(-1/2, 1/2, 1)\}$ ☐ $\{(1, 1, -2), (-1, 1, 0)\}$
☐ $\{(1, 1, 0)\}$ ☐ $\{(1, 1, 0), (-1/2, 1/2, 1)\}$

---

20. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle x \, , \, y \rangle = x^T A \, y$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$ são vectores coluna.

a) Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, \frac{-1}{2})$ e $(1, 1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, \frac{-1}{2})$ e $(1, 1)$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.

b) Designe por $\text{proj}_v u$ a projecção ortogonal de u sobre v para o produto interno dado. Então

☐ $\text{proj}_{(1,1)}(1, 0) = \frac{2}{3}(1, 0)$ ☐ $\text{proj}_{(1,0)}(1, 1) = \frac{2}{3}(1, 0)$

☐ $\text{proj}_{(1,0)}(1, 1) = (1, 1)$ ☐ $\text{proj}_{(1,1)}(0, 1) = \frac{1}{3}(1, 1)$