Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

7ª Lista de Exercícios

Problema 1. Supondo que a população $P(t)$ de um certo planeta cresce à taxa (instantânea) de 5% ao ano, i.e $P' = 0,05P$, determine ao fim de quanto tempo duplicou a população.

Problema 2. A equação diferencial $y' = \frac{1}{10}y$ modela o problema: "Uma certa cultura de bactérias duplica de tamanho ao fim de 10 minutos".

Se a cultura de bactérias tem 100 indivíduos no instante $t = 0$ determine ao fim de quanto tempo atinge 3000.

Problema 3. O problema: "a temperatura T de uma sala aquecida decresce a razão de 0,008 vezes a diferença entre a temperatura actual e a temperatura exterior fixa a 15 graus", pode ser modelado pela equação diferencial $T' = -0,008(T-15)$.

a) Faça a mudança de variável $T - 15 = y$ e escreva a correspondente equação diferenciável para y. Determine ainda a respectiva solução geral.
b) Determine ao fim de quanto tempo a temperatura da sala atinge os 18 graus sabendo que no instante inicial $t = 0$ a temperatura da sala era de 25 graus.

Problema 4. Determine a solução geral dos seguintes sistemas de equações diferenciais.

$$a) \left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & 3y_1 + y_2 \\ y_2' & = & 5y_1 + y_2 \end{array}\right. \quad b) \left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' & = & y_1 + y_2 \end{array}\right. \quad c) \left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' & = & y_1 + y_2 \\ y_3' & = & y_2 - y_3 \end{array}\right.$$

Problema 5. Para cada um dos sistemas do problema anterior determine a solução que verifica as condicões

a) $y_1(0) = 0$ e $y_2(0) = 0$.
b) $y_1(0) = 2$ e $y_2'(0) = 1$.
c) $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ e $y_3(0) = 0$.

Problema 6. Escreva as seguintes equações diferenciais na forma de um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem e determine a solução geral das equações dadas.

a) $y'' - y - 6y = 0$.
b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Problema 7. Mostre que t^2 é uma solução da equação diferencial não homogénea $y'' - y - 6y = 2 - 2t - 6t^2$. Use ainda a solução geral da equação da alínea a) do problema anterior para determinar a solução geral desta equação.

Problema 8. Prove que se A é uma matriz $n \times n$ diagonalizável e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ satisfaz a equação diferencial $Y' = AY$, então cada um dos y_i é uma combinação linear de $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são valores próprios de A.

Problema 9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e o sistema de equações diferenciais $Y' = AY$.

a) Verifique que a matriz A não é diagonalizável e determine uma base de vectores de $\mathbb{R}^4$ relativamente à qual a matriz A seja a representação matricial de uma certa transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
b) Mostre que a equação diferencial $y' = \lambda y + C\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}$, onde C é uma constante e n um inteiro positivo, admite $C\frac{t^n}{n!}e^{\lambda t}$ como solução. Use esta solução para determinar a solução geral desta equação.
c) Use os resultados das alíneas anteriores para determinar a solução geral do sistema homogéneo de equações diferenciais dado.

Problema 10. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais $Y' = AY$ onde A é a matriz

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$; $(i = \sqrt{-1})$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercícios de escolha múltipla

---

11. A solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_2 \\ y_1(0) = 8 \text{ e } y_2(0) = 5 \end{cases}$$

é:

- ☐ $(3e^t + 5e^{3t}\,,\, 5e^{3t})$.
- ☐ $(3e^{3t} + 5e^t\,,\, 5e^t)$.
- ☐ $(8e^t\,,\, 5e^{3t})$.
- ☐ $(3e^t + 5e^{2t} + 3e^{3t}\,,\, 5e^{3t})$.
