Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

6^{a} Lista de Exercícios

Problema 1. Diga quais dos vectores seguintes são vectores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Em caso afirmativo, indique o valor próprio correspondente.

a) $(0,2,2)$ *b)* $(0,5,0)$ *c)* $(0,0,0)$ *d)* $(-1,-1,2)$ *e)* $(-2,-2,2)$

Problema 2.

Suponha que v é um vector próprio de uma matriz invertível M. Mostre que v também é um vector próprio de M^{-1} e determine o valor próprio de M^{-1} que lhe está associado.

Problema 3.

Suponha que a matriz M tem um vector próprio v associado a um valor próprio λ. Mostre que v é um vector próprio de M^2 associado ao valor próprio λ^2.

Problema 4.

Para cada uma das matrizes seguintes encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 5. Mostre que para uma matriz A, 2×2, a equação característica é dada por

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0,$$

onde $\operatorname{tr}(A)$ designa o traço de A.

Diga ainda qual o valor de $\operatorname{tr}(A)$ e $\det(A)$ se $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 8$ são os valores próprios de uma matriz A, 2×2.

Problema 6. Um dos teoremas fundamentais da Álgebra Linear é o teorema de Cayley-Hamilton que diz que uma matriz quadrada A verifica a sua equação característica. Isto é, se

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

é a equação característica de A, então também se verifica

$$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0.$$

a) Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Este teorema pode ser usado para calcular as potências de uma matriz de forma recursiva. Deduza a fórmula de recorrência para uma matriz A, 2×2. Use esta fórmula para calcular A^3 onde A é a matriz da alínea anterior.

Problema 7. Considere a matriz $n \times n$, $B = [b_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ com

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ 0 & \text{se } j \neq i+1 \text{ e } i \neq n \\ -c_k & \text{se } i = n \text{ e } k = j-1 \end{cases} .$$

Isto é

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Mostre que o polinómio característico de B é $p(\lambda) = (-1)^n(c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)$.
Nota: A matriz B também é conhecida como a matriz companheira de $p(\lambda)$.

Problema 8.

Entre as matrizes dadas, determine quais as que são diagonalizáveis. Em caso afirmativo encontre a matriz S que diagonaliza a matriz dada A (ou seja tal que $S^{-1}AS$ é diagonal).

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$.
b) Use a alínea anterior para calcular A^{25} e encontrar os seus valores próprios e bases para os espaços próprios.

Problema 10. Um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se um subespaço invariante para uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se a imagem de S por F está contida em S, isto é $F(S) \subseteq S$.

Considere a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x) = Ax$, onde A é uma certa matriz real $n \times n$.

a) Mostre que os subespaços próprios de valores próprios reais são subespaços invariantes.
b) Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine subespaços invariantes para F.
c) Verifique que a função F da alínea anterior representa uma reflexão em relação à recta $y = x$. Represente geométricamente os subespaços invariantes que encontrou na alínea anterior, e diga se existem outros subespaços invariantes para F.

Exercícios de escolha múltipla

---

11. Sejam u, v e w vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ e A uma matriz 3×3 tal que $Au = 2u$, $Av = 0$ e $Aw = w$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ $B = (u, v, w)$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.
☐ A matriz A não é invertível.
☐ A matriz A não é diagonalizável.
☐ $\lambda = 1$ não é um valor próprio de A.

---

12. Seja $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2}$ uma matriz real , 2×2, tal que $a_{11}+a_{22} = 0$ e $\det(A) = 1$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ Zero é um valor próprio de A.
☐ O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$
☐ A matriz A não tem valores próprios complexos.
☐ 1 e -1 são valores próprios de A.
