Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º ano — 2005/06

Resoluções/Soluções da 10^{a} lista de exercícios

Problema 1. Diga, justificando, quais das seguintes funções são transformações lineares.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$.
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$.
d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$.
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$.
f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$.

Resolução:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear se para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ e quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tem
$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$
Então, considerando $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ tem-se
$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= T((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= ((\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2\,, 3(\alpha x_1 + \beta y_1) - \alpha x_2 - \beta y_2) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha x_2\,,\ 3\alpha x_1 - \alpha x_2) + (\beta y_1 + \beta y_2\,,\ 3\beta y_1 - \beta y_2) \\ &= \alpha T(x_1, x_2) + \beta T(y_1, y_2) = \alpha T(x) + \beta T(y). \end{aligned}$$
Ou seja T é linear.

b) T não é linear uma vez que $T(0, 0) = (1, -1) \neq (0, 0)$.

c) T é linear (verifique por exemplo, usando a definição tal como em a)).

d) T não é linear já que, por exemplo, para $x = (0, 1, 0)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ não se tem $T((0, \alpha, 0) = \alpha T(0, 1, 0)$ mas sim
$$T((0, \alpha, 0)) = (0, 3\alpha^2, 0) = \alpha^2(0, 3, 0) = \alpha^2 T(0, 1, 0)$$

e) T não é linear. Encontre, por exemplo, um vector $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\alpha x) \neq \alpha T(x)$.

f) T é linear. Faça a prova usando a definição (tal como na alínea a)) ou verifique que pode escrever T na forma $T(x) = Ax$, onde A é a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Problema 2. Considere os vectores v_1, v_2 e v_3 do espaço linear W, e $T : W \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(v_1) = (1, -1, 2)$, $T(v_2) = (0, 3, 2)$, $T(v_3) = (-3, 1, 2)$. Determine $T(3v_1 - v_2 + 10v_3)$.

Resolução: Como T é linear então

$$T(3v_1 - v_2 + 10v_3) = 3T(v_1) - T(v_2) + 10T(v_3).$$

Da igualdade anterior e das expressões para $T(v_1), T(v_2)$ e $T(v_3)$ dadas no enunciado, temos $T(3v_1 - v_2 + 10v_3) = (-27, 4, 24)$.

Problema 5. Defina cada uma das transformações lineares T seguintes na forma $T(X) = AX$, onde A é uma matriz. Use a matriz A para obter as imagens por T do triângulo I de vértices $(-1, 2), (0, 0)$ e $(1, 1)$, onde T é :

a) A reflexão em relação ao eixo dos xx ;
b) A reflexão em relação à recta $y = x$;
c) A projecção ortogonal sobre a recta $y = -x$.
d) A rotação em torno da origem no sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido positivo) por um ângulo de $\pi/2$.

Resolução: Para determinarmos a matriz que representa T na base canónica basta-nos conhecer as imagens por T dos vectores da base canónica $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.

b) Como $T(1, 0) = (0, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$ então $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, o triângulo é transformado no triângulo de vértices:

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) A recta $y = -x$ é gerada, por exemplo, pelo vector $(1, -1)$, então:
$T(1, 0) = \text{proj}_{(1,-1)}(1, 0) = \frac{1}{2}(1, -1)$ e $T(0, 1) = \text{proj}_{(1,-1)}(0, 1) = \frac{-1}{2}(1, -1)$.
Logo $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. A imagem do triângulo vai ser o segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $\frac{1}{2}(-3, 3)$

Problema 7. Seja $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-1, 4)$, e $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ a matriz que representa a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base ordenada $B = (v_1, v_2)$.

a) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base B.
b) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$.
c) Encontre a matriz que representa T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, e encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2)$.
d) Use a fórmula obtida em c) para calcular $T(1, 1)$.

Resolução:

a) A matriz dada tem nas colunas $(T(v_1))_B$ e $(T(v_2))_B$, ou seja as coordenadas na base B de $T(v_1)$ e $T(v_2)$. Logo

$$(T(v_1))_B = (1, -2)_B, \quad \text{e} \quad (T(v_1))_B = (3, 5)_B.$$

b) Da alínea anterior temos

$$(T(v_1))_B = (1, -2)_B \Longleftrightarrow T(v_1) = v_1 - 2v_2 = (3, -5)$$
$$(T(v_1))_B = (3, 5)_B \Longleftrightarrow T(v_2) = 3v_1 + 5v_2 = (-2, 29).$$

c) A matriz $M(T, BC, BC)$ é a matriz que tem nas colunas $(T((1, 0)))_{BC}$ e $(T((0, 1)))_{BC}$.
Como T é linear então

$$T(v_1) = T\left((1, 3)\right) = T\left((1, 0) + 3(0, 1)\right) = T\left((1, 0)\right) + 3T\left((0, 1)\right) = (3, -5)$$
$$T(v_2) = T\left((-1, 4)\right) = T\left(-(1, 0) + 4(0, 1)\right) = -T\left((1, 0)\right) + 4T\left((0, 1)\right) = (-2, 29)$$

Resolvendo o sistema anterior para $T\left((1, 0)\right)$ e $T\left((0, 1)\right)$ obtemos

$$T\left((0, 1)\right) = (\frac{1}{7}, \frac{24}{7}) \quad \text{e} \quad T\left((1, 0)\right) = (\frac{18}{7}, \frac{-107}{7})$$

Logo

$$M(T, BC, BC) = \begin{bmatrix} \frac{18}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-107}{7} & \frac{24}{7} \end{bmatrix}$$

e

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{18}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-107}{7} & \frac{24}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{18x_1 + x_2}{7}, \frac{-107x_1 + 24x_2}{7} \right)$$

d) Pela alínea anterior temos $T(1, 1) = \left(\frac{19}{7}, \frac{-83}{7}\right)$.

Problema 8. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, a base canónica $BC = (e_1, e_2, e_3)$, e a base ordenada $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (0, 0, 1))$.

a) Determine a matriz F que realiza a mudança de base de BC para $\mathcal{B}$, isto é tal que $x_{\mathcal{B}} = F x_{BC}$.

b) Dado um vector $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, isto é, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) na base BC, determine as suas coordenadas (y_1, y_2, y_3) na base $\mathcal{B}$.

c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja representação matricial na base canónica é $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$.

Resolução:

a) A matriz F tem nas colunas $(e_1)_\mathcal{B}, (e_2)_\mathcal{B}$ e $(e_3)_\mathcal{B}$. Como

$$e_1 = (1,0,0) = \alpha(-1,1,1) + \beta(-1,-1,1) + \gamma(0,0,1) = (-\alpha-\beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta+\gamma)$$
$$\Longleftrightarrow \alpha = \frac{-1}{2}, \beta = \frac{-1}{2}, \gamma = 1$$
$$e_2 = (0,1,0) = (-\alpha-\beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta+\gamma) \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{-1}{2}, \gamma = 0$$
$$e_3 = (0,0,1)(-\alpha-\beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta+\gamma) \Longleftrightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$$

Ou seja $(e_1)_\mathcal{B} = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1)_\mathcal{B}$, $(e_2)_\mathcal{B} = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)_\mathcal{B}$ e $(e_3)_\mathcal{B} = (0,0,1)_\mathcal{B}$, logo

$$F = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Como a matriz F da alínea anterior é a matriz de mudança da base BC para a base $\mathcal{B}$ então

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{x_2-x_1}{2} \\ \frac{-x_2-x_1}{2} \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}_\mathcal{B}.$$

c) Sendo M a matriz que representa a transformação linear na base canónica e A a matriz que representa a mesma transformação linear na base $\mathcal{B}$ então estas duas matrizes estão relacionadas através da matriz F de mudança de base, por:

$$AF = FM \Longleftrightarrow A = FMF^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 9. Seja V o espaço linear real das matrizes reais 2×2, de entradas a_{ij}, satisfazendo $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{12} + a_{21} = 0$. Considere as seguintes matrizes de V:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V.
b) Dada a transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(H) = J \ , \ T(J) = -H \ ,$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base que contenha H e J.
c) Determine a dimensão do núcleo de T, e diga (justificando) se T é invertível.

Resolução:

a) Usemos a definição de vectores linearmente independentes:

$$\alpha H + \beta J = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

b) Note que $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Ou seja $V = L\{H, J\}$. Logo uma base para B é dada por $\{H, J\}$.
c) Considere-se a base ordenada $B = (H, J)$ de V. Então a matriz que representa T na base B do espaço de partida e na base B do espaço de chegada é

$$M(T, B, B) = [(T(H))_B | (T(J))_B]$$

Como $T(H) = J$ e $T(J) = -H$ então $(T(H))_B = (0, 1)$ e $(T(J))_B = (-1, 0)$. Logo

$$M(T, B, B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) O núcleo de T pode determinar-se através do núcleo de $M = M(T, B, B)$ e o núcleo de M é dado por $N(M) = \{(0, 0)\}$, ou seja $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Uma condição necessária e suficiente para que uma transformação linear seja invertível é que o seu núcleo seja constituído só pelo vector zero. Logo neste caso T é invertível.

Problema 11. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2).$$

a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.
b) Indique um vector de $\mathbb{R}^2$ que não esteja na imagem da transformação.
c) Verifique o teorema da dimensão.

Resolução:

a) A transformação linear pode ser escrita na forma:

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Logo, determinar o núcleo e a imagem de T é determinar, respectivamente, o núcleo da matriz A e o espaço das colunas de A. Assim, o núcleo é dado por

$$N(T) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 = x_2\right\}$$

e, notando que as colunas de A são múltiplas, a imagem de T é:

$$\mathrm{Im}(T) = L\left(\{(4,2)\}\right) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\right\}.$$

b) Qualquer vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que não verifique $x = 2y$ não pertence ao conjunto imagem de T, por exemplo $(1, 3)$.

c) A dimensão do núcleo de T é 1 bem como da imagem de T, logo

$$\dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2.$$

Problema 12. Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}$ o espaço das matrizes 2×2. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ a aplicação $T(A) = A + A^t$.

a) Mostre que T é uma transformação linear.

b) Determine a matriz K que representa T em relação à base ordenada

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

c) Determine bases para o núcleo e para a imagem de T.

d) Diga, justificando, se T é injectiva ou sobrejectiva.

e) Sendo $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ determine $T^{-1}(M)$.

Observação: *Dada uma função $f : A \to B$ e $b \in B$, define-se a imagem completa inversa de b como sendo $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$. Note que o conjunto $f^{-1}(b)$ está definido mesmo que não exista a função inversa de f.*

Resolução:

a) Mostrar que T é linear é provar que $T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$ para quaisquer α e β escalares e quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

$$T(\alpha A+\beta B) = \alpha A+\beta B+(\alpha A+\beta B)^t = \alpha A+\alpha A^t+\beta B+\beta B^t = \alpha T(A)+\beta T(B).$$

b) Designe-se os elementos da base $\mathcal{B}_2$ por $\mathcal{B}_2 = (E_1, E_2, E_3, E_4)$. Então a matriz $K = M(T, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$ tem nas colunas

$$(T(E_1))_{\mathcal{B}_2}, (T(E_2))_{\mathcal{B}_2}, (T(E_3))_{\mathcal{B}_2}, (T(E_4))_{\mathcal{B}_2}.$$

Como

$$\begin{aligned}
T(E_1) &= E_1 + E_1^t = 2E_1 \Longrightarrow (T(E_1))_{\mathcal{B}_2} = (2, 0, 0, 0) \\
T(E_2) &= E_2 + E_2^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_2 + E_3 \Longrightarrow (T(E_2))_{\mathcal{B}_2} = (0, 1, 1, 0) \\
T(E_3) &= E_3 + E_3^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_2 + E_3 \Longrightarrow (T(E_3))_{\mathcal{B}_2} = (0, 1, 1, 0) \\
T(E_4) &= E_4 + E_4^t = 2E_4 \Longrightarrow (T(E_4))_{\mathcal{B}_2} = (0, 0, 0, 2)
\end{aligned}$$

Então $K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

c) O núcleo da matriz K é dado por $N(K) = \{(0, y, -y, 0) : \ y \in \mathbb{R}\}$ e o espaço das colunas de K por $EC(K) = \{(x, y, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
Logo uma base para $N(K)$ é dada por $\{(0, 1, -1, 0)\}$ e para $EC(K)$ por $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
Escrevendo os elementos destes conjuntos na base $\mathcal{B}_2$, temos

$$\begin{aligned}
\text{Base}_{N(T)} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
\text{Base}_{\text{Im(T)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

d) T não é injectiva já que o seu núcleo não é constituído só pela matriz nula, nem é sobrejectiva já que a dimensão do contradomínio de T é 3 e portanto diferente de 4.

e) Pretende-se o conjunto das matrizes $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tais que

$$T(X) = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

ou seja: $a = d = 1$ e $b = 2 - c$. Assim

$$T^{-1}(M) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2-c \\ c & 1 \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Problema 13. Indique o valor lógico das seguintes proposições:

a) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
b) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
c) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
d) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
e) Existem transformações lineares injectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2.
f) Existem transformações lineares sobrejectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2.
g) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^4$ é sobrejectiva.
h) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^5$ é sobrejectiva.
i) Existe uma transformação linear bijectiva do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o das matrizes 2×2.

Solução: Proposições verdadeiras: b), c), e), f), g), i).