Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º Semestre — 10 Dez. 2005

Nome:______________________________	
Número:______________________	Curso: __________

Duração: 1H:30M
Cotação das perguntas de escolha múltipla: Correcta: 1.2 v. Errada: -0,4v.
Instruções:

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- Não é permitido usar calculadoras.
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas neste enunciado, e as perguntas de desenvolvimento em caderno separado.
- **Identifique** e **numere** as páginas do seu caderno de respostas. Se **interromper** uma resposta, **indique**, no sítio onde a interrompeu, o número da página onde vai continuar a resolução.
- Antes de entregar o teste certifique-se que a **tabela da esquerda** está bem preenchida. Nesta tabela marque com um **traço** as linhas correspondentes às perguntas a que não respondeu.

A preencher pelo aluno

Pergunta	Nº das pág. onde está a resolução
9	
10	
11 a)	
11 b)	
12	

A preencher pelo docente

Pergunta	Classificação	Cotação
9		2.5
10		2.5
11 a)		0.7
11b)		0.7
12		1
EM-Cert.		
EM-Erra.		
EM-Total		

Registo:	**Nota:**

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$. Os valores de α e β para os quais $(1,1)$ e $(1,-1)$ são vectores próprios de A são: **[1.2]**

☐ $\alpha = 1$ e $\beta = 3$.
☐ $\alpha = 5$ e $\beta = 1$.
☐ $\alpha = -1$ e $\beta = -5$.
☐ $\alpha = 6$ e $\beta = 4$.

---

2. Considere A uma matriz real 3×3, cujo núcleo, $N(A)$, tem dimensão 1 e u, v vectores de $\mathbb{R}^3$ não nulos que verificam $Au = u$ e $Av = -v$ e a lista de afirmações seguinte. **[1.2]**

I. A matriz A é diagonalizável.
II. $\det(A) = 0$.
III. Para $w \neq 0$ e $w \in N(A)$ então $\{u, v, w\}$ é uma base de vectores próprios.
IV. A matriz A é invertível.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ II e III ☐ I e III e IV ☐ I e II e III ☐ I e II

---

3. Seja A uma matriz real 4×4 não diagonalizável cujo polinómio característico é $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 2)$. Considere a seguinte lista de afirmações: **[1.2]**

I. A matriz A é simétrica.
II. Todos os subespaços próprios têm dimensão 1.
III. A matriz A é invertível.
IV. O espaço das colunas de A tem dimensão 1.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e II e III ☐ II e IV ☐ II e III ☐ III e IV

---

4. Considere **[1.2]**

$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \\ y_1(0) = 3 \text{ e } y_2(0) = 1 \end{cases}$$

A solução deste problema é:

☐ $(2e^{2t} - e^{-2t}, 2e^{2t} + e^{-2t})$ ☐ $(2e^{2t} + e^{-2t}, 2e^{2t} - e^{-2t})$

☐ $(3e^{2t}, e^{-2t})$ ☐ $(2e^{2t} + e^{t}, 2e^{2t} - e^{t})$

---

5. Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e os vectores seguintes: **[1.2]**

$$u = (0, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad v = (1, -1, 1, -1),$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira.

☐ u e v são ortogonais.
☐ $\|v\| = 1$
☐ O ângulo entre u e v é zero graus.
☐ A distância de u a v é 3.

---

6. Seja A uma matriz real 3×4 tal que o núcleo de A^T tem dimensão 2 (i.e. $\dim N(A^T) = 2$). Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira. **[1.2]**

☐ O complemento ortogonal de $N(A^T)$ tem dimensão 1.
☐ O núcleo de A tem dimensão 1.
☐ O complemento ortogonal de $N(A)$ tem dimensão 2.
☐ O complemento ortogonal do espaço das linhas de A tem dimensão 2.

---

7. Considere a matriz real **[1.2]**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira.

☐ A matriz A é simétrica para qualquer valor de $k \in \mathbb{R}$.
☐ A matriz A é anti-simétrica para $k = -1$
☐ A matriz A é ortogonal para $k = \sqrt{2}$.
☐ A matriz A é ortogonal para $k = -1$.

---

8. Seja $W \subseteq \mathbb{R}^4$ o subespaço definido por **[1.2]**

$$W = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0 \text{ e } x+y+z=0\right\}.$$

Considere a seguinte lista de afirmações:

I. $\dim W = 2$.
II. O vector $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -\sqrt{72}, 0)$ pertence a W.
III. $\dim W^\perp = 3$.
IV O vector $(1,0,0,0)$ pertence a $W^\perp$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ I e II e III ☐ I e II ☐ III e IV

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **[2.5]**

Verifique que A é diagonalizável e determine uma matriz ortogonal S tal que $S^{-1}AS$ seja diagonal. Indique ainda a matriz diagonal correspondente à matriz S que calculou.

10. Determine a função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é solução do seguinte problema **[2.5]**

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 3. \end{cases}$$

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Recorde que a projecção ortogonal de um vector x de $\mathbb{R}^n$ sobre o espaço das colunas de uma matriz A, $n \times k$, é dada por $Px = A(A^TA)^{-1}A^Tx$.

a) Determine o vector do espaço das colunas de A mais próximo de b. **[0.7]**
b) Determine equações para o núcleo de A^T. **[0.7]**

12. Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa. **[1.0]**

- Se A é uma matriz 2×2, D uma matriz 2×2 diagonal e P_1, P_2 matrizes invertíveis tais que $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = D$ então $P_1 = P_2$.